Berliner Hochschule für Technik

# Übungsblatt 4

## Funktionen und Ableitungen im $\mathbb{R}^n$

### 1. Bestimmen Sie, welche z der Funktion entsprechen

$a)\ x^2 z - 4y^2 - 2xy = 3$

$b)\ x z^2 - xy + y^2 = 4$

$c)\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

$d)\ z - x \ln y - 2xz = 0$

### 2. Bestimmen Sie das Bild der Höhenlinien von

a.) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

b.) $f(x, y) = x^2 - y^2$

c.) $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$

### 3. Bestimmen Sie die Schnittkurven von Flächen mit der y-z-Ebene und der x-z-Ebene von

a.) $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

b.) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

### 4. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von:

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung folgender Funktionen

$a)\ f(x, y, z) = \sin(xy) + \ln(yz)$

$b)\ f(x, y, z) = \cos(x + y) + e^x \sin(z)$

$c)\ f(x, y, z) = \frac{x z^2}{\cos y} + y^2 \ln(xz)$

### 5. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von:

Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen

$a)\ \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{1}{2} m v^2\right); \quad \frac{\partial}{\partial v_0}(v_0 + at); \quad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)$

$b)\ \frac{\partial}{\partial t} \sin(ct - 5x); \quad \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}}\right)$

$c)\ \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{e^{x\beta - 3}}{2y\beta + 5}; \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

## Lösungen – Übungsblatt 4:

1.

Die Funktionen $z = f(x, y)$ entsprechen

$a)\; x^2 z - 4y^2 - 2xy = 3, \qquad z = \frac{3}{x^2} + 4\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}$

$d)\; z(1 - 2x) - x \ln y = 0, \qquad z = \frac{x \ln y}{1 - 2x}$

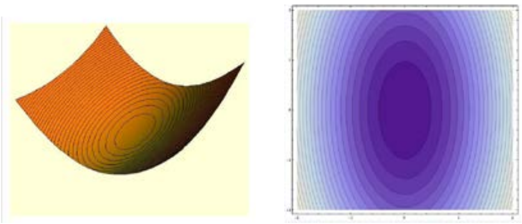
Keinen Funktionen $z = f(x, y)$ entsprechen

$b)\; x z^2 - xy + y^2 = 4, \qquad z^2 = \frac{4}{x} + y - \frac{y^2}{x}, \qquad z = \pm\sqrt{\frac{4}{x} + y - \frac{y^2}{x}}$

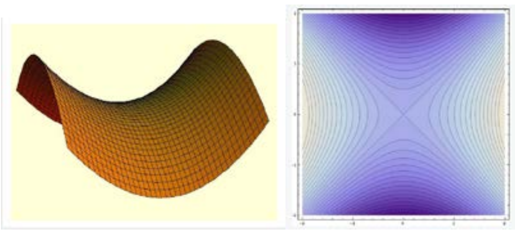
$c)\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \qquad z = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$

**2.**

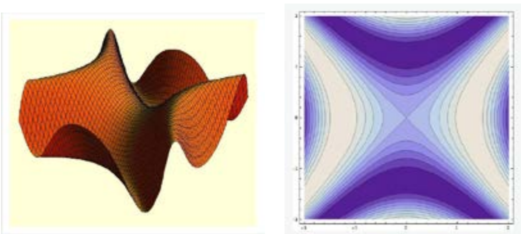
a.



b.



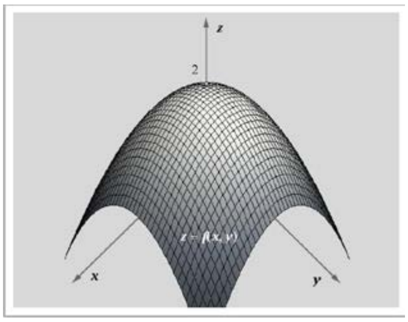
c.



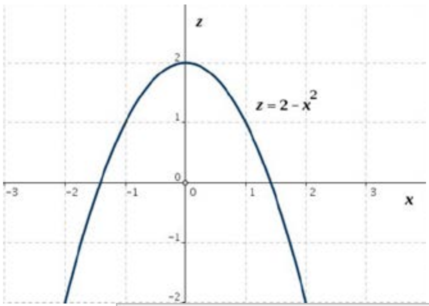
Lsg.

**3.**

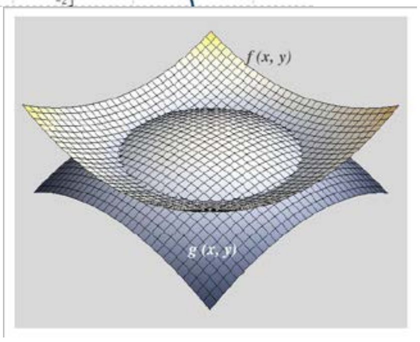
a.




*Die Schnittkurve der Funktion $z = f(x, y)$ mit der z,x-Ebene (die Schnittkurve $z = 2 - x^2$)*

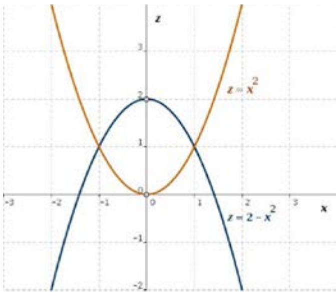



b.




*Die Schnittkurven der Funktionen $z = f(x, y)$ und $z = g(x, y)$ mit der z,x-Ebene*

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = 2 - x^2 - y^2$$



Lsg.

**4.** Partielle Ableitungen

a) $f(x, y, z) = \sin(x\,y) + \ln(y\,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(x\,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(x\,y) + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

b) $f(x, y, z) = \cos(x + y) + e^{x}\sin(z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x + y) + e^{x}\sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x + y), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{x}\cos z$$

c) $f(x, y, z) = \dfrac{x\,z^2}{\cos y} + y^2\ln(x\,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z^2}{\cos y} + \frac{y^2}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\,z^2\sin y}{\cos^2 y} + 2\,y\ln(x\,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2\,x\,z}{\cos y} + \frac{y^2}{z}$$

**5.**

a) $\dfrac{\partial}{\partial m}\left(\dfrac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \dfrac{v^2}{2}; \quad \dfrac{\partial}{\partial v_0}(v_0 + a\,t) = 1; \quad \dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{2\,\pi\,r}{T}\right) = -\dfrac{2\,\pi\,r}{T^2}$

b) $\dfrac{\partial}{\partial t}\sin(c\,t - 5\,x) = c\cos(c\,t - 5\,x); \quad \dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{2\,\pi\,r^{3/2}}{\sqrt{G\,M}}\right) = -\dfrac{\pi\,r^{3/2}}{\sqrt{G\,M^3}}$

c) $\dfrac{\partial}{\partial \beta}\,\dfrac{e^{x\beta-3}}{2\,y\beta + 5} = e^{x\beta-3}\,\dfrac{(2\,x\,y\beta + 5\,x - 2\,y)}{(2\,y\beta + 5)^2}$

$$\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0\,v}{c^2\,\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}}$$