Übungsblatt 2

Anwendung Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$

1. Unbestimmte Integrale: siehe Ü 00

2. Bestimmte Integrale siehe Ü 00

3. Substitutionsregel siehe Ü 00

4. Uneigentliche Integrale (werden wir überspringen - nicht klausurrelevant)

Prüfen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale:

a. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

b. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx, \alpha \in \mathbb{R}$

c. $\int_0^{\infty} \sin x \; dx$

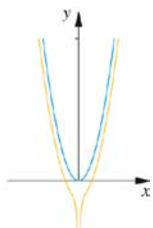
5. Anwendung Flächenberechnung

Gesucht ist der Flächeninhalt A(G) des beschränkten Gebietes von G, das von den Kurven mit den Gleichungen $y^2 = x$ und $y = x - 2$ eingeschlossen wird.
Hinweis: Bevor Sie losrechnen, überlegen Sie, ob Sie durch geschickte Wahl der Integrationsvariable den Rechengang vereinfachen können.

6. Anwendung Kurvenlänge

Berechnen Sie die Länge des Parabelbogens $f(x) = x^2$ im Intervall [-0.5; 1.5].

7. Anwendung Rotationsvolumen



Aus: Arens et al., *Mathematik*, ISBN: 978-3-8274-2347-4
© Spektrum Akademischer Verlag 2012

Gegeben sei die Form eines Sektglases, das durch die Rotation der Parabel $y = \frac{x^2}{a}$ um die y-Achse entsteht:

Bestimmen Sie:

Die Sektmenge bei 200 Gläsern bei einer Füllung bis zur Höhe $h/2$, mit h=7cm und a=0,6 cm.

Das Wievielfache mehr an Flaschen benötigen Sie, wenn Sie die Gläser vollständig füllen wollen.

Lösungen – Übungsblatt 2:

1.

a) $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - 3{,}5x^2 + x + C$

b) $F(x) = -\frac{7}{2} \cdot x^{-2} + C$

c) $F(x) = \frac{6}{7} \cdot x^{\frac{7}{6}} + C$

d) $F(x) = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{7}{3}} + x + C$

e) $F(x) = -\frac{1}{2}\cot(x) + C$

f) $F(x) = 3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2}$

g) $F(x) = \frac{\sinh(x)}{e^{\tan x} + 1} \cdot \frac{t^2}{2} + C$

h) $F(x) = \ln x + C$

i) $F(x) = -\frac{4}{3}\cos x + C$

j) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos x + C$

2.

a) 5,15

b) π

c) 1,79

d) 49,4

3.

a) $F(x)=\frac{3}{8}(2x-7)^{\frac{4}{3}}+C$

b) $F(x)=-\ln(-x+1)+C$

c) $F(x)=\frac{1}{3\ln 2}2^{3x+6}+C$

d) $F(x)=2\cos(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3})+C$

e) $F(x)=\arctan(x+1)+C$

f) $F(x)=\tan(4t-5)+C$

g) $F(x)=\frac{3}{8}(t^2-7)^{\frac{4}{3}}+C$

h) $F(x)=-1{,}5\ln(-x^2+1)+C$

i) $F(x)=\frac{1}{4}e^{2x^2+3}+C$

j) $F(x)=-\frac{7}{8}\cos^8 x+C$

k) $F(x)=-\frac{1}{8}(1-2\sin x)^4+C$

l) $F(x)=\frac{1}{3\cos^3 x}+C$

m) $F(x)=-\ln(\cos x)+C$

n) $F(x)=\frac{1}{4\sin^2 x}+C$

o) $F(x)=\frac{1}{9}(2\ln x+3)^{\frac{3}{2}}+C$

p) $F(x)=\sin(e^x)+C$

q) $F(x)=-e^{\cos x}+C$

r) $F(x)=\frac{1}{2\tan(2x)}+C$

s) $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x)}+C$

t) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)}+C$

u) $F(x)=\frac{1}{3}\arctan(\frac{x-5}{3})+C$

v) $F(x)=\frac{1}{9}\arctan(\frac{x-1}{3})+C$

4.

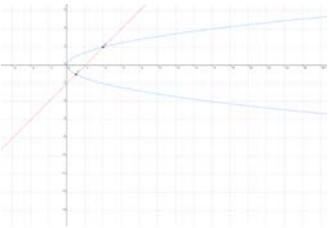
a. $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=1$

b. $\int\limits_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases} divergent\ für\ \alpha\le 1 \\ konvergent\ für\ \alpha>1 mit \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{\alpha-1}\end{cases},$

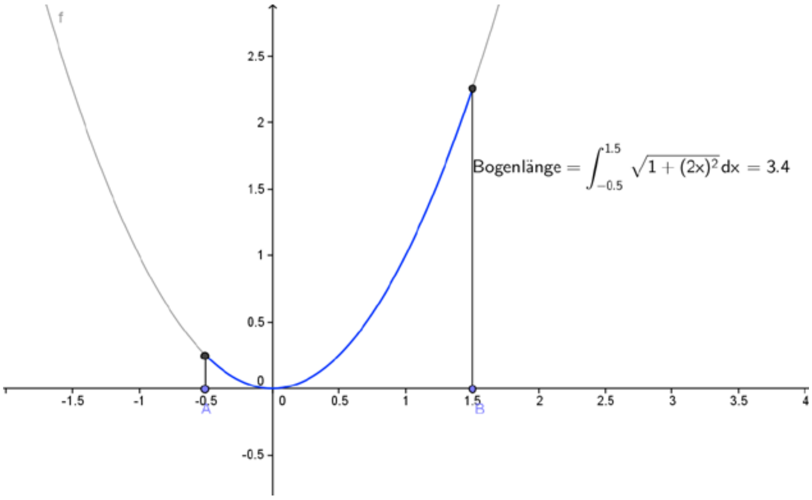
c. Für b >0 ist $\int\limits_0^b \sin x\ dx=1-\cos b$ und $\cos b$ *hat für* $b\to\infty$ keinen Grenzwert, das Integral ist also divergent.

5.

Betrachtet man die Kurven als Funktionen von y, kommt man mit einem Integrationsbereich aus: $A=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy=4{,}5$.



6.



7.

Das Volumen des Sektglases mit einem Deckflächenradius von $r=\sqrt{ah}$ beträgt $V=\frac{1}{2}\pi a h^2=\frac{1}{2}\pi\, r^2 h$. Damit ergibt sich:

a) ca. 3 Flaschen
b) genau das Vierfache, also ca. 12 Flaschen.