

## Übungsblatt 3

### Determinante, Abbildungen, Eigenwerte, Eigenvektoren

#### 1. Determinante, Inverse Matrix:

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  und die rechte Seite  $\vec{d} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Lösen Sie das Gleichungssystem mithilfe der inversen Matrix  $A^{-1}$ .

#### 2. Spiegelmatrix

Welche Matrix spiegelt im zweidimensionalen Vektorraum mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem an der Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten (diese Spiegelung vertauscht  $x$ - und  $y$ -Koordinaten).

Welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat diese Matrix (anschaulich und rechnerisch)?

#### 3. Eigenwerte, charakteristisches Polynom

a) Bestimmen Sie zur Matrix  $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  das charakteristische Polynom  $p(\lambda) = \det(M - \lambda E)$  und die Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Setzen Sie die Matrix selber an Stelle von  $\lambda$  in das Polynom ein und berechnen sie  $p(M)$ .

(Hinter das absolute Glied muss man dann sinngemäß die Einheitsmatrix schreiben und das Ergebnis ist sinngemäß die Nullmatrix und nicht die Zahlennull. Zur Kontrolle:  $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ ;  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ )

#### 4. Eigenwerte, Eigenvektoren

Gegeben ist die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ .

Bestimmen Sie

- alle Eigenwerte von  $A$  und
- den Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert.

Lösungen - Übungsblatt 3:

1.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{d} \quad | \quad A^{-1} \cdot \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{d}.$$

$$\text{(Zur Kontrolle: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x} = (14, 19, -23) \text{)}$$

2.

Die gesuchte Matrix lautet  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , die Eigenvektoren sind (ganz anschaulich) Vektoren auf dem Spiegel  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  zum Eigenwert  $\lambda = 1$  und Vektoren senkrecht zum Spiegel  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  zum Eigenwert  $\lambda = -1$ .

3.

$$\text{Lös: } \det(M - \lambda E) = 2 - 3\lambda + \lambda^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \{\lambda \rightarrow 1, \lambda \rightarrow 2\}$$
$$p(M) = 2E - 3M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

a)  $\det A = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(6 - \lambda) = 0$   
 $\Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 6;$

b)  $\text{EV1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$