# Übungsblatt 1
## Grundlagen und Komplexe Zahlen

**1.**

i. Für welche $x \in \mathbf{R}$ gilt? $\frac{|x-1|}{x+1} < 1$

ii. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $\left|\frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right| \leq \frac{1}{x+4}$

**2.** Finden Sie zu den gegebenen komplexen Zahlen die konjugiert komplexen Zahlen und zeichnen sie in der Gaußschen Zahlenebene:

$$z_1 = i\,,\quad z_2 = 2 + i\,,\quad z_3 = -4 + 2i\,,$$
$$z_4 = 3,\quad z_5 = -3 - 1.5i\,,\quad z_6 = 5 - i$$

**3.** Berechnen Sie die Beträge der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = 4 + 3i\,,\quad z_2 = 3 + 4i\,,\quad z_3 = 4 - 3i$$
$$z_4 = 3 - 4i\,,\quad z_5 = -3 + 4i\,,\quad z_6 = 5$$
$$z_7 = -2\sqrt{6} + i\,,\quad z_8 = -1 - 2\sqrt{6}\,i\,,\quad z_9 = 5i$$

**4.** Berechnen Sie die Beträge der folgenden komplexen Zahlen und zeichnen sie auf der Gaußschen Zahlenebene:

$$z_1 = 2i\,,\quad z_2 = 3 + i^2\,,\quad z_3 = -\sqrt{3} + i\,,\quad z_4 = -2$$
$$z_5 = -\sqrt{3} - i\,,\quad z_6 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

**5.** Bestimmen Sie die Beträge folgender komplexen Zahlen:

$$z_1 = -6 + i\,,\quad z_2 = 5 + i^3\,,\quad z_3 = -\sqrt{21} + 2i$$
$$z_4 = -\sqrt{6} - \sqrt{3}i\,,\quad z_5 = \sqrt{35} - i^3\,,\quad z_6 = \sqrt{15} + i$$

Berliner Hochschule für Technik

## 6.

Stellen Sie die folgende Menge in der Gaußschen Zahlenebene dar:

$$M_a = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 1 \}$$

$$M_b = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geqslant -3 \}$$

$$M_c = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant -1 , \quad \mathrm{Im}(z) \geqslant 1 \}$$

$$M_d = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant \mathrm{Re}(z) < 3 \}$$

$$M_e = \{ z \in \mathbb{C} \mid -3 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 2 , \quad -1 < \mathrm{Im}(z) < 2 \}$$

$$M_f = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) \leqslant 2 \}$$

$$M_g = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1 \}$$

$$M_h = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \}$$

$$M_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2 \}$$

**7.**

Stellen Sie die in der trigonometrischen Form vorliegenden komplexen Zahlen durch den Zeiger in der Gaußschen Zahlen ebene dar. Geben Sie die kartesische Form dieser Zahlen an:

a) $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) $z_3 = \cos\pi + i\sin\pi$,

$z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

c) $z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$z_6 = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

d) $z_7$: $r = 2$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $z_8$: $r = 3$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

e) $z_9$: $r = \frac{3}{2}$, $\varphi = -\frac{13}{6}\pi$, $z_{10}$: $r = \sqrt{3}$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

f) $z_{11}$: $r = 3$, $\varphi = 60^\circ$, $z_{12}$: $r = 2$, $\varphi = 210^\circ$

g) $z_{13}$: $r = 2$, $\varphi = 18^\circ$, $z_{14}$: $r = 2$, $\varphi = -36^\circ$

h) $z_{15}$: $r = 2$, $\varphi = 162^\circ$, $z_{16}$: $r = \sqrt{3}$, $\varphi = 200^\circ$

**8.** Stellen Sie die gegebenen komplexen Zahlen in der kartesischen Form dar:

$a)\ z:\ r = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$

$b)\ z:\ r = 2\sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$

$c)\ z:\ r = -2, \quad \varphi = 3\pi$

$d)\ z:\ r = -4, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$e)\ z:\ r = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$

$f)\ z:\ r = 2\sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$

$g)\ z:\ r = \sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{13\pi}{6}$

**9.** Die in der kartesischen Form gegebenen komplexen Zahlen sind in die Polarform umzurechnen:

1: $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

2: $z = -3 + 5i$

3: $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\, i$

4: $z = 1 - i$

5: $z = 2i$

**10.** Komplexe Rechnung Addition, Subtraktion:

Aufgabe 1:

$a)\ (1 + 5i) + (2 - 3i)$

$b)\ (12 - 2i) + (7 - i)$

$c)\ (21 + 3i) + (2 - i) + (-11 + 3i)$

$d)\ (31 - 1.5i) - (21 - 3.5i)$

$e)\ (12.4 + 1.7i) - (9.53 + 4.89i)$

$f)\ (19 + 2.7i) + 3(1 - i) - (30 + 8i)$

$g)\ (a + bi) - (b + 2ci) + (-3a + 2bi)$

$h)\ \left(5\alpha - \frac{2\beta}{3}\, i\right) - 6\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} i\right) - \left(3\alpha + \frac{\beta}{3}\, i\right)$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie mit der komplexen Zahl $z = x + i\,y$ die folgenden Terme:

$$\frac{1}{2}\left(z + z^*\right), \quad \frac{1}{2\,i}\left(z - z^*\right)$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 + 3\,z_2 + 2\,z_3^*$$

mit den komplexen Zahlen

$a)\quad z_1 = 2 + 3\,i, \quad z_2 = 4 - 2\,i, \quad z_3 = 1 + i$

$b)\quad z_1 = 5 + 7\,i, \quad z_2 = -3 - i, \quad z_3 = 2.5 - 0.5\,i$

$c)\quad z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,i, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,i, \quad z_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,i$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit den gegebenen komplexen Zahlen:

$$\frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{3}, \quad z_1 - z_2 - (z_2^* - z_1^*), \quad \frac{z_1}{2} - z_3^* + 2(z_2 - z_2^*)$$

$$\frac{i}{2}(z_1 - z_1^*) - i\,(z_3 - z_3^*) + \frac{i^3}{2}(z_2 - z_2^*)$$

$$\frac{i}{2}(z_1 + z_1^*) + \frac{i^3}{2}(z_3 + z_3^*) + \frac{i^5}{3}(z_2 + z_2^*)$$

$$i\,(z_1 + z_1^*) + i^2\,(z_2 - z_2^*) + i^6\,(z_3 - z_3^*)$$

$$z_1 = 1 + 2\,i, \quad z_2 = 3 - i, \quad z_3 = 2 + \frac{2}{3}\,i$$

Aufgabe 5:

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit den gegebenen komplexen Zahlen:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$2\,z_1 + 3\,z_2, \quad 4\,z_1 - 2\,z_2^*$$

mit den komplexen Zahlen

$a)\quad z_1 = 2 \cdot e^{i\,30^\circ}, \quad z_2 = 4 \cdot e^{-i\,60^\circ}$

$b)\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\quad\quad z_2 = 8\left(\cos\frac{3\,\pi}{4} + i\sin\frac{3\,\pi}{4}\right)$

$c)\quad z_1 = 5 \cdot e^{i\,90^\circ}, \quad z_2 = 4 \cdot e^{-i\,90^\circ}$

$d)\quad z_1 = 6 \cdot e^{i\,60^\circ}, \quad z_2 = -4\left(\cos\frac{2\,\pi}{3} + i\sin\frac{2\,\pi}{3}\right)$

$e)\quad z_1 = -2 \cdot e^{i\,\pi}, \quad z_2 = 3 \cdot e^{0\cdot i}$

**11.** Komplexe Rechnung: Multiplikation, Division: (z* sei die konjugiert-komplexe Zahl zu z)

Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

*a*) $z_1 = 1 + 2i\,, \quad z_2 = 3 - 2i\,, \quad z_3 = 4 - 3i$

*b*) $z_1 = 5 + i\,, \quad z_2 = -2 + 4i\,, \quad z_3 = 2i$

die folgenden Terme

$z_1 \cdot z_2\,, \quad 3\,z_1 \cdot z_2^*\,, \quad 2\,z_1^* \cdot z_2\,, \quad z_1^2\,, \quad z_1^* \cdot z_2 \cdot z_3^*$

$z_2^2\,, \quad z_1 \cdot z_3^* + z_1^* \cdot z_3\,, \quad (z_2 \cdot z_3)^*\,, \quad z_1 \cdot z_2^* + z_3^*$

**12.** Zeigen Sie, dass folgende trigonometrische Umformung gilt

$$sin(3\varphi) = 3\,sin\varphi - 4\,sin^3\,\varphi$$

**13.** Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 + 32 = 0$$

und skizzieren Sie sie in der Gauß´schen Zahlenebene.

Lösungen:Ü_1

## 1.

i. $\mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-1 \;\vee\; x>0\}$

$Fall\,1: x<-4;\ \mathbb{L}_1=\varnothing;$

$Fall\,2: -4<x<\frac{3}{5};\mathbb{L}_2=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(-4<x\le -3.2133) \;\vee\; (-0.18673\le x<0.6)\}$

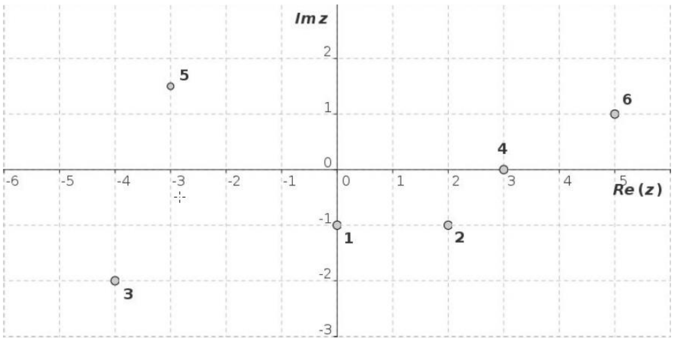
$Fall\,3: \frac{3}{5}<x;\mathbb{L}_3=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0.6\le x\le 1.1792\}$

ii. $\mathbb{L}_{ges}=\mathbb{L}_3\cup\mathbb{L}_3\cup\mathbb{L}_3=\left]-4;\ -3.2133\right]\cup\left[-0.18673;\ 0.6\right[\cup\left[0.6;\ 1.1792\right]$

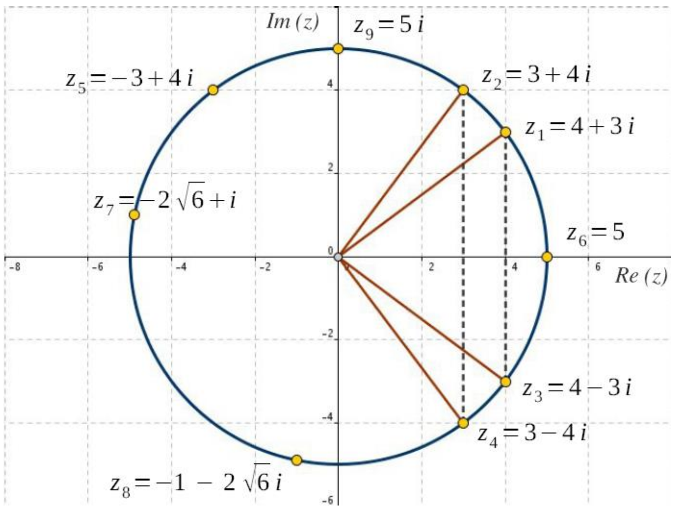
$\mathbb{L}_{ges}=\left]-4;\ -3.2133\right]\cup\left[-0.18673;\ 1.1792\right]=$

$=\left]-4;\ -1.7-\sqrt{2.29}\right]\cup\left[-1.7+\sqrt{2.29};\ -1.7+\sqrt{8.29}\right]$

## 2.

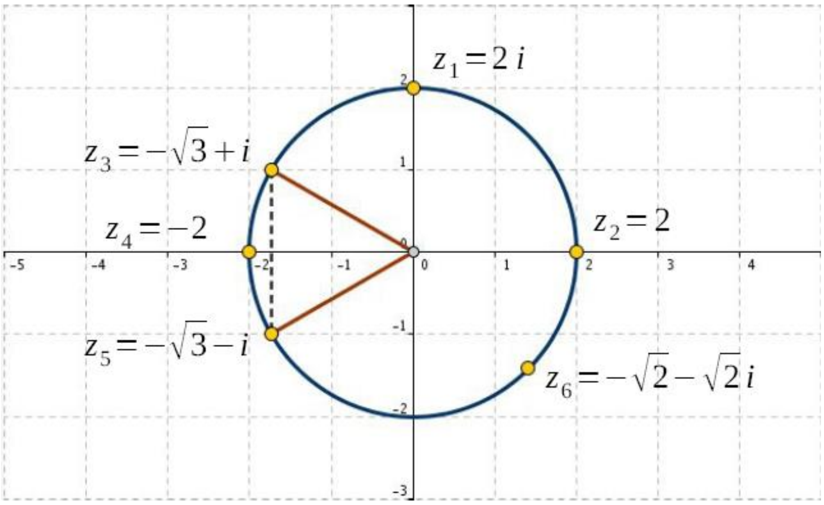



## 3.




Alle komplexen Zahlen befinden sich auf einem Kreis mit dem Radius R = 5, deswegen haben sie den gleichen Betrag 5.
$|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_8|=|z_9|=5$

**4.**




**5.**

$$z_1 = -6 + i\,, \qquad |z_1| = \sqrt{(-6)^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

$$z_2 = 5 + i^3 = 5 - i\,, \qquad |z_2| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

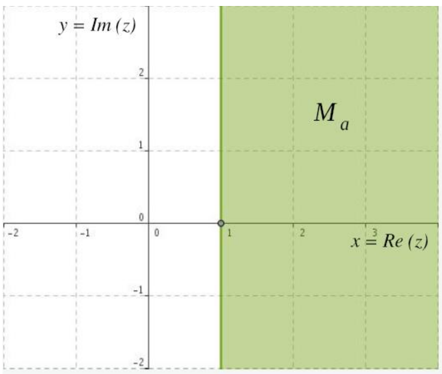
$$z_3 = -\sqrt{21} + 2i\,, \qquad |z_3| = \sqrt{(\sqrt{21})^2 + 2^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$z_4 = -\sqrt{6} - \sqrt{3}\, i\,, \qquad |z_4| = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$z_5 = \sqrt{35} - i^3 = \sqrt{35} + i\,, \qquad |z_5| = \sqrt{35 + 1} = \sqrt{36} = 6$$

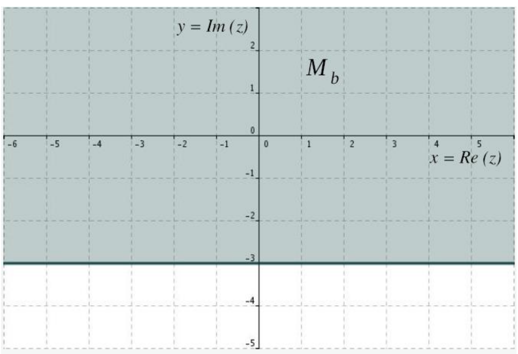
$$z_6 = \sqrt{15} + i\,, \qquad |z_6| = \sqrt{15 + 1} = \sqrt{16} = 4$$

**6.**



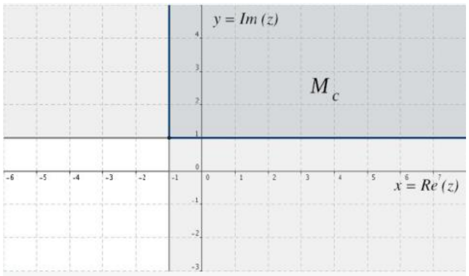

$$M_a = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geqslant 1 \}$$

a) $z = x + iy\,, \quad \operatorname{Re}(z) = x \geqslant 1$



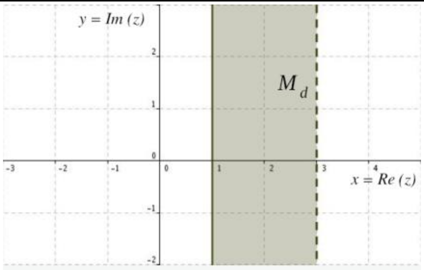

$$M_b = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geqslant -3 \}$$

b) $z = x + iy\,, \quad \operatorname{Im}(z) = y \geqslant -3$




$$M_c = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant -1,\ \ \mathrm{Im}(z) \geqslant 1 \}$$

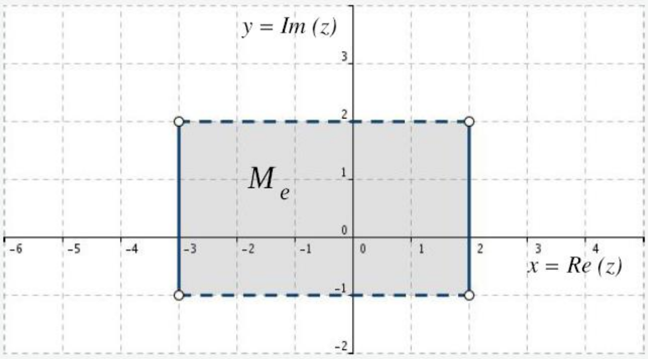
c) $z = x + i\,y, \quad \mathrm{Re}(z) = x \geqslant -1, \quad \mathrm{Im}(z) = y \geqslant 1$




$$M_d = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant \mathrm{Re}(z) < 3 \}$$

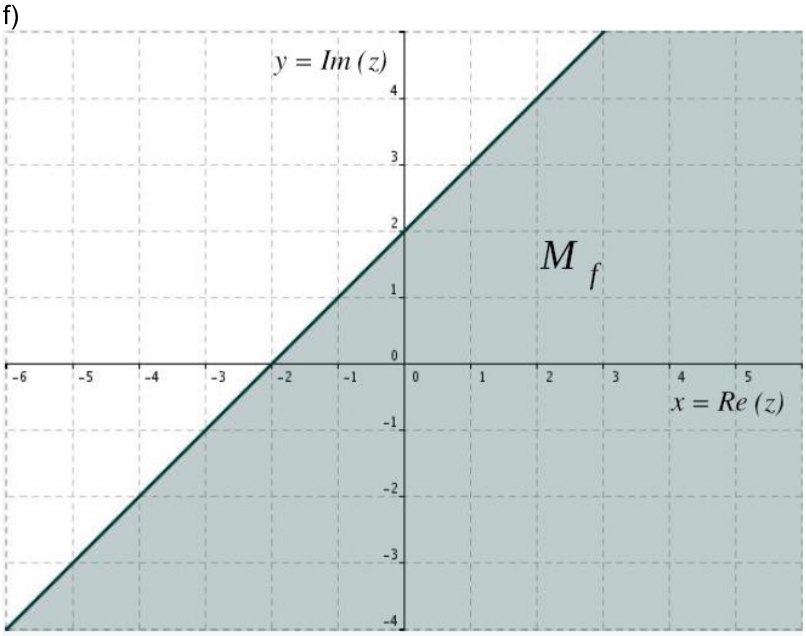
d) $z = x + i\,y, \quad 1 \leqslant \mathrm{Re}(z) = x < 3$

e)




$$M_e = \{ z \in \mathbb{C} \mid -3 \leqslant \mathrm{Re}(z) = x \leqslant 2,\ \ -1 < \mathrm{Im}(z) = y < 2 \}$$

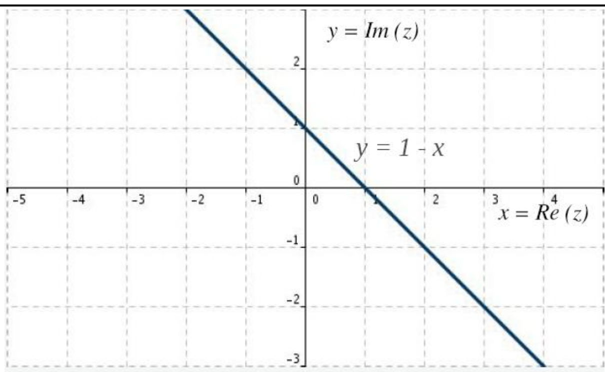
f)




$$M_f = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) \leqslant 2 \}$$

$$\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) = y - x \leqslant 2$$

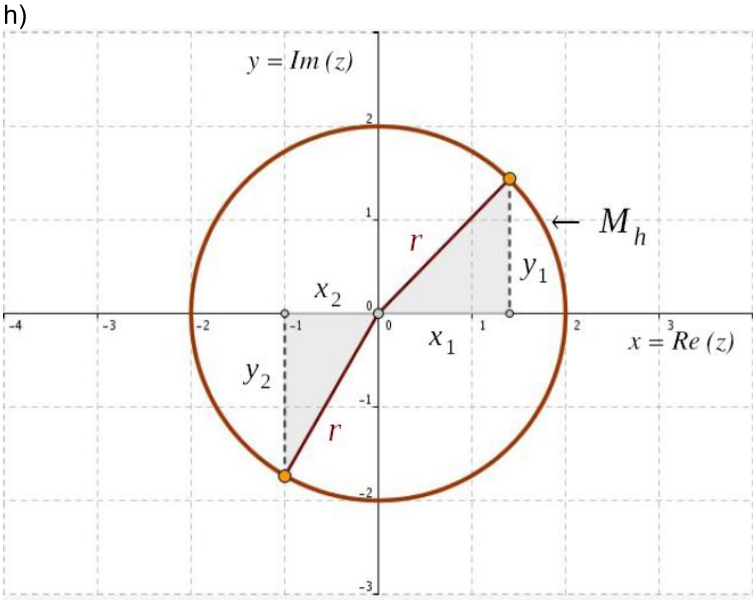
g)




$$M_g = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1 \}$$

$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = x + y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 - x$$

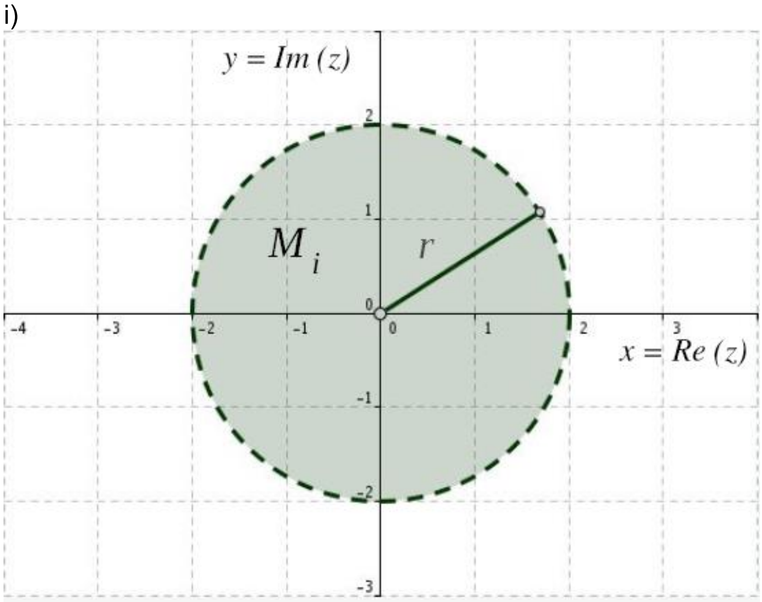
h)




$$M_h = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \}$$

$$|z| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = r = 2$$

i)




$$M_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2 \}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} < 2$$

## 7.

a)

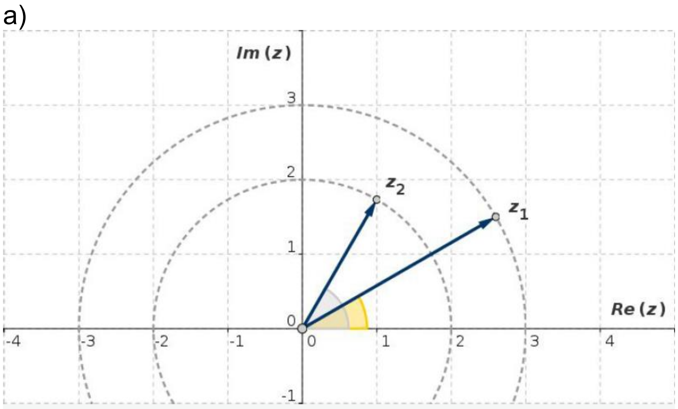



*Abb. L1a: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene*

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$$

b)

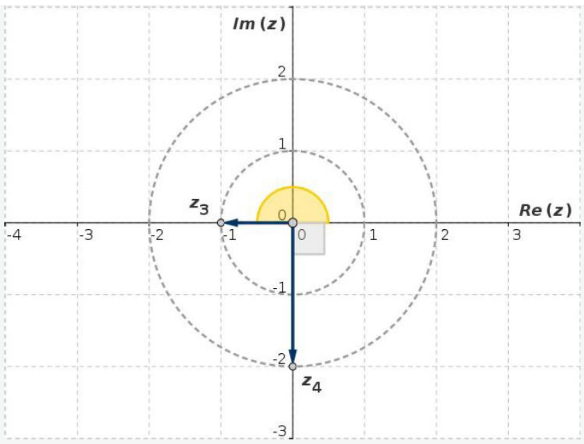



*Abb. L1b: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene*

$$z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \qquad z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2\,i$$

c)

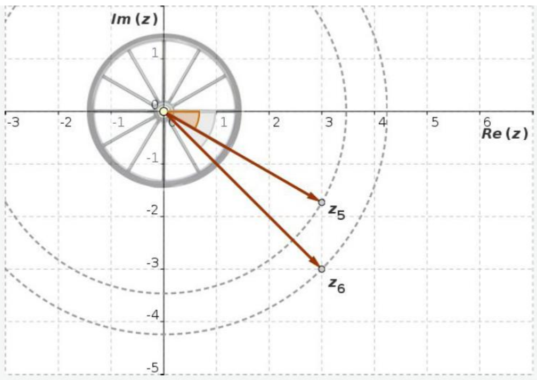



*Abb. L1c: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene*

$$z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3 - \sqrt{3}\,i$$

$$z_6 = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\,(1 - i)$$

d)

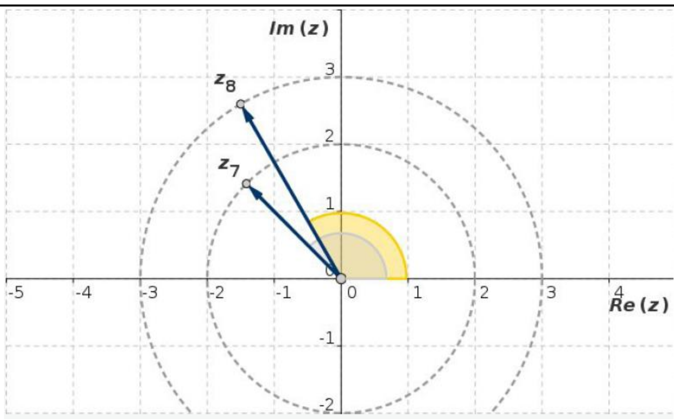



*Abb. L1d: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene, dargestellt durch Betrag und Winkel*

$$z_7 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_8 = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i$$

e)

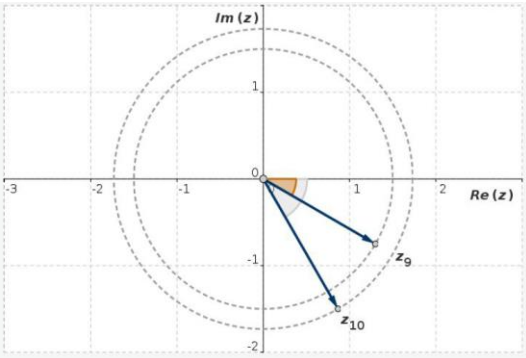



*Abb. L1e: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene*

$$z_9 = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{13}{6}\pi\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3} - i\right)$$

$$z_{10} = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{3}{2}$$

f)

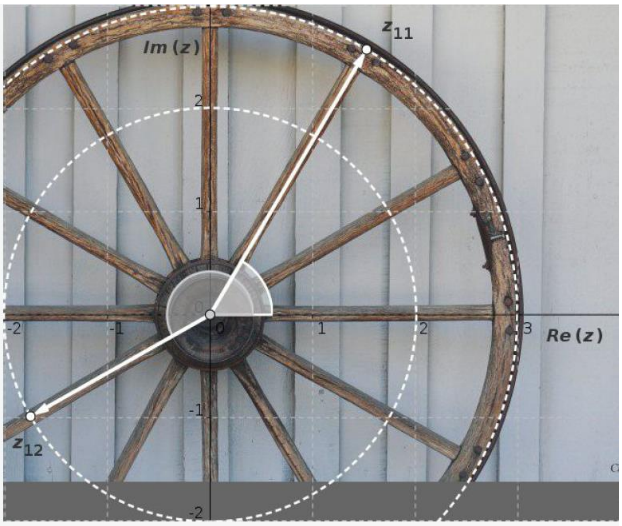
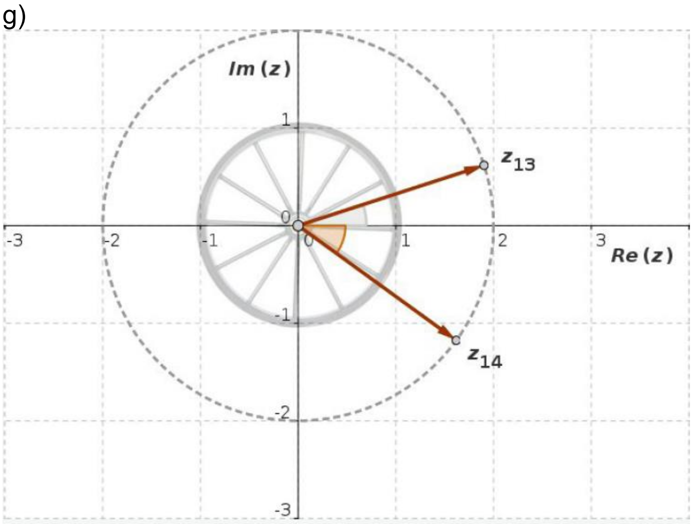



*Abb. L1f: Graphische Darstellung der komplexen Zahlen der Aufgabe 1f*

$$z_{11} = \frac{3}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \qquad z_{12} = -\sqrt{3} - i$$

g)

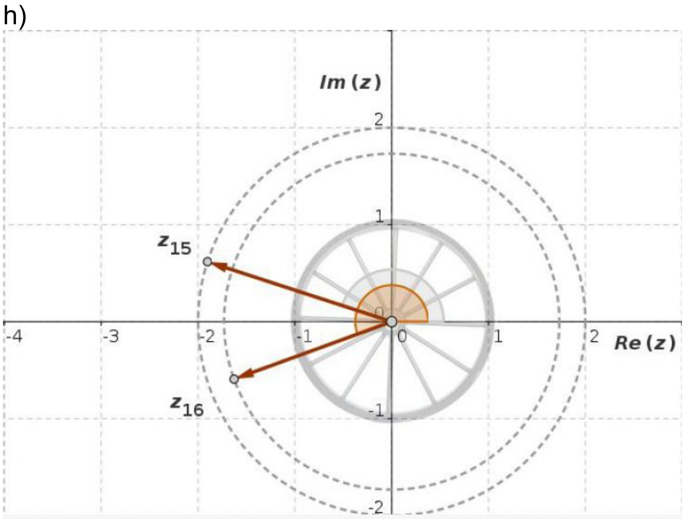



*Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene*

$$z_{13} = 2\ (\cos(18^\circ) + i \sin(18^\circ)) \simeq 1.902 + i\,0.618$$

$$z_{14} = 2\ (\cos(-36^\circ) + i \sin(-36^\circ)) \simeq 1.618 - i\,1.176$$

h)




*Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene*

$$z_{15} = 2\ (\cos(162^\circ) + i \sin(162^\circ)) \simeq -1.902 + i\,0.618$$

$$z_{16} = 2\ (\cos(200^\circ) + i \sin(200^\circ)) \simeq -1.628 - i\,0.592$$

**8.**

$$a)\ z:\ r = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}, \qquad z = \sqrt{3} + i$$

$$b)\ z:\ r = 2\sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \qquad z = \sqrt{3} + 3\,i$$

$$c)\ z:\ r = -2, \quad \varphi = 3\,\pi, \qquad z = 2$$

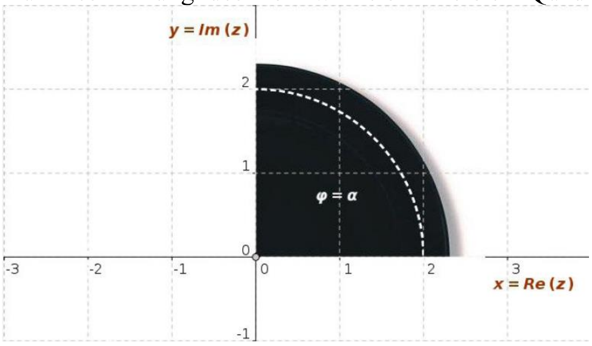
$$d)\ z:\ r = -4, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad z = -4\,i$$

$$e)\ z:\ r = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{3\,\pi}{4}, \qquad z = -1 + i$$

$$f)\ z:\ r = 2\sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{2\,\pi}{3}, \qquad z = -\sqrt{3} + 3\,i$$

$$g)\ z:\ r = \sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{13\,\pi}{6}, \qquad z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

**9.** 2.1: Zur Bestimmung des Polarwinkels im ersten Quadrant

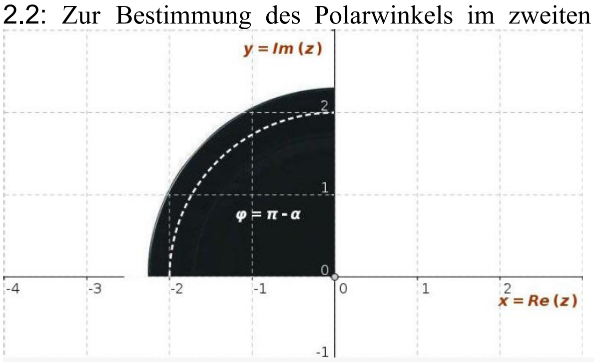



$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i, \qquad r = |\,z\,| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\sin\ \alpha = \frac{|\,y\,|}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \alpha \quad (x > 0, \quad y > 0)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = 2\ e^{i\,\frac{\pi}{4}} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

2.2: Zur Bestimmung des Polarwinkels im zweiten Quadrant



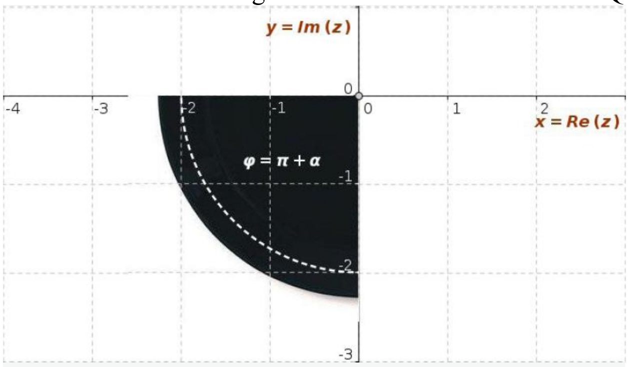

$$z = -3 + 5\,i, \qquad r = |\,z\,| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34} \simeq 5.831$$

$$\sin\ \alpha = \frac{|\,y\,|}{r} = \frac{5}{\sqrt{34}} \simeq 0.858, \qquad \alpha = 59.04$$

$$x < 0, \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi - \alpha = 180^\circ - 59.04 \simeq 120.96^\circ$$

$$z = 5.83\ e^{i\,120.96^\circ} = 5.83\ (\cos(120.96^\circ) + i\,\sin(120.96^\circ))$$

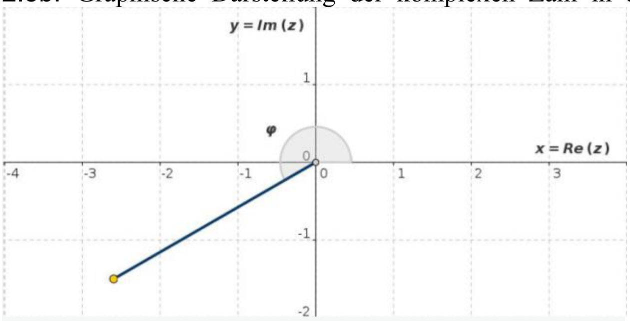
2.3a: Zur Bestimmung des Polarwinkels im dritten Quadrant




$$z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i\,, \qquad r = |z| = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3+1} = 3$$

$$\sin\alpha = \frac{|y|}{r} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = \pi + \alpha = \frac{7\pi}{6} \quad (x<0,\ y<0)$$

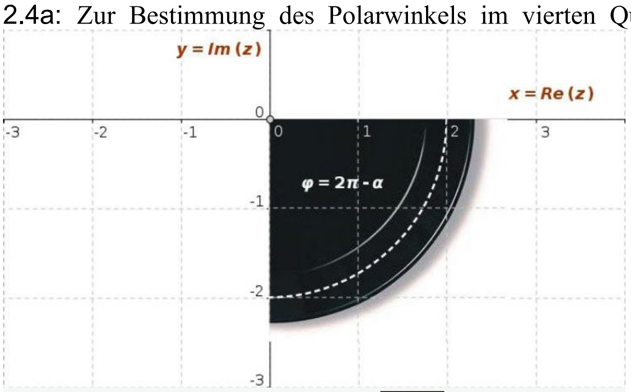
2.3b: Graphische Darstellung der komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene




$$-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i = 3\,e^{i\frac{7\pi}{6}} = 3\,e^{i\pi}\,e^{i\frac{\pi}{6}} = -3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\sin\pi = -1$$

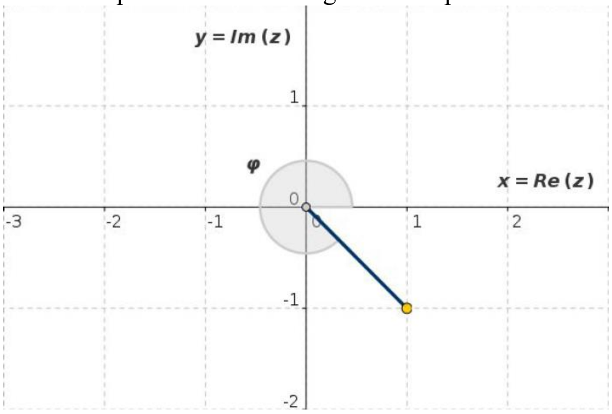
2.4a: Zur Bestimmung des Polarwinkels im vierten Quadrant



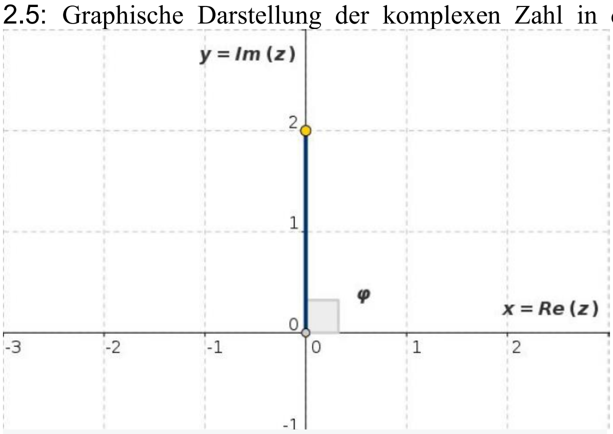

$$z = 1 - i\,, \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{|y|}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = 2\pi - \alpha \quad (x>0,\ y<0)$$

2.4b: Graphische Darstellung der komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene




2.5: Graphische Darstellung der komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene




$$z = 2\,i\,, \qquad r = |\,z\,| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{2} = 1, \quad x = 0, \quad y > 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ, \quad z = 2\,e^{i\,90^\circ}$$

## 10.

10.1)

$a)\quad (1 + 5\,i) + (2 - 3\,i) = 3 + 2\,i$

$b)\quad (12 - 2\,i) + (7 - i) = 19 - 3\,i$

$c)\quad (21 + 3\,i) + (2 - i) + (-11 + 3\,i) = 12 + 5\,i$

$d)\quad (31 - 1.5\,i) - (21 - 3.5\,i) = 10 + 2\,i$

$e)\quad (12.4 + 1.7\,i) - (9.53 + 4.89\,i) = 2.87 - 3.19\,i$

$f)\quad (19 + 2.7\,i) + 3\,(1 - i) - (30 + 8\,i) = -8 - 8.3\,i$

$g)\quad (a + b\,i) - (b + 2\,c\,i) + (-3\,a + 2\,b\,i) = -2\,a - b + (3\,b - 2\,c)\,i$

$$h)\quad \left(5\,\alpha - \frac{2\,\beta}{3}\,i\right) - 6\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3}\,i\right) - \left(3\,\alpha + \frac{\beta}{3}\,i\right) =$$

$$= 2\,\alpha - 3\,\beta - (\,\beta + 2\,\gamma\,)\,i$$

10.2)

Lösung 2: $\frac{1}{2}\left(z + z^*\right) = x = \mathrm{Re}(z)$, $\frac{1}{2i}\left(z - z^*\right) = y = \mathrm{Im}(z)$

10.3)

a) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - 2i$, $z_3 = 1 + i$

$z_1 + z_2 = 6 + i$, $z_1 - z_2 = -2 + 5i$, $z_1 + 3z_2 + 2z_3^* = 16 - 5i$

b) $z_1 = 5 + 7i$, $z_2 = -3 - i$, $z_3 = 2.5 - 0.5i$

$z_1 + z_2 = 2 + 6i$, $z_1 - z_2 = 8(1 + i)$, $z_1 + 3z_2 + 2z_3^* = 1 + 5i$

c) $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, $z_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$

$z_1 + z_2 = \frac{5}{6}(1 - i)$, $z_1 - z_2 = \frac{1}{6}(-1 + 13i)$

$z_1 + 3z_2 + 2z_3^* = \frac{10}{3}(1 - i)$

10.4)

$$\frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}i$$

$$z_1 - z_2 - (z_2^* - z_1^*) = -4$$

$$\frac{z_1}{2} - z_3^* + 2(z_2 - z_2^*) = -\frac{3}{2} - \frac{7}{3}i$$

$$\frac{i}{2}(z_1 - z_1^*) - i(z_3 - z_3^*) + \frac{i^3}{2}(z_2 - z_2^*) = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{i}{2}(z_1 + z_1^*) + \frac{i^3}{2}(z_3 + z_3^*) + \frac{i^5}{3}(z_2 + z_2^*) = i$$

$$i(z_1 + z_1^*) + i^2(z_2 - z_2^*) + i^6(z_3 - z_3^*) = \frac{8}{3}i$$

10.5)

Die Zahlen müssen zuerst in die algebraische Form gebracht werden:

$a)\quad z_1 = 2\cdot e^{i\,30^\circ} = \sqrt{3} + i\,,\qquad z_2 = 4\cdot e^{-i\,60^\circ} = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

$2z_1 + 3z_2 = 2\sqrt{3} + 6 + (2 - 6\sqrt{3})\,i = 9.464 - 8.392\,i$

$4z_1 - 2z_2^* = 4(\sqrt{3} - 1) + 4(1 - \sqrt{3})\,i = 2.928\,(1 - i)$

$b)\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,(1 + i)$

$z_2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\,(-1 + i)$

$2z_1 + 3z_2 = -10\sqrt{2} + 14\sqrt{2}\,i = 2\sqrt{2}\,(-5 + 7i) =$

$= -14.142 + 19.799\,i$

$4z_1 - 2z_2^* = 12\sqrt{2}\,(1 + i) = 16.971\,(1 + i)$

$c)\quad z_1 = 5\cdot e^{i\,90^\circ} = 5\,i\,,\qquad z_2 = 4\cdot e^{-i\,90^\circ} = -4\,i$

$2z_1 + 3z_2 = -2\,i\,,\qquad 4z_1 - 2z_2^* = 12\,i$

$d)\quad z_1 = 6\cdot e^{i\,60^\circ} = 3\,(1 + \sqrt{3}\,i)$

$z_2 = -4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\,(1 - \sqrt{3}\,i)$

$2z_1 + 3z_2 = 12$

$4z_1 - 2z_2^* = 8\,(1 + \sqrt{3}\,i) = 8 + 13.856\,i$

$e)\quad z_1 = -2\cdot e^{i\pi} = 2\,,\qquad z_2 = 3\cdot e^{0\cdot i} = 3$

$2z_1 + 3z_2 = 13,\qquad 4z_1 - 2z_2^* = 2$

## 11.

Komplexe Rechnung: Multiplikation, Division: (z* sei die konjugiert-komplexe Zahl zu z)

a)

$z_1\cdot z_2 = 7 + 4\,i\,,\qquad 3\;z_1\cdot z_2^* = -3 + 24\,i\,,\qquad 2\;z_1^*\cdot z_2 = -2 - 16\,i$

$z_1^2 = -3 + 4\,i\,,\qquad z_1^*\cdot z_2\cdot z_3^* = 20 - 35\,i\,,\qquad z_2^2 = 5 - 12\,i$

$z_1\cdot z_3^* + z_1^*\cdot z_3 = -4,\qquad (z_2\cdot z_3)^* = 6 + 17\,i\,,\qquad z_1\cdot z_2^* + z_3^* = 3 + 11\,i$

b)

$z_1\cdot z_2 = -14 + 18\,i\,,\qquad 3\;z_1\cdot z_2^* = -18 - 66\,i\,,\qquad 2\;z_1^*\cdot z_2 = -12 + 44\,i$

$z_1^2 = 24 + 10\,i\,,\qquad z_1^*\cdot z_2\cdot z_3^* = 44 + 12\,i\,,\qquad z_2^2 = -12 - 16\,i$

$z_1\cdot z_3^* + z_1^*\cdot z_3 = 4,\qquad (z_2\cdot z_3)^* = -8 + 4\,i\,,\qquad z_1\cdot z_2^* + z_3^* = -6 - 24\,i$

[Quelle: Aufgaben und Lösungen, Frau Prof. L.Vassilevskaya]

## 12. Komplexe Rechnung: Eulersche Darstellung und Potenzregeln

$e^{3i\varphi} = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$ und andererseits ist direkt ausmultipliziert:

$$\left(e^{i\varphi}\right)^3 = \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi \cdot (i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3$$

$$\left[\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\right] + i\left[3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi\right]$$

Vergleicht man nun Realteil und Imaginärteil miteinander, so ergibt sich:

$$\sin 3\varphi = \left[3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi\right] = 3\left[1-\sin^2\varphi\right]\sin\varphi - \sin^3\varphi; \ also$$

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

## 13.