

Übungsblatt 3

Determinante, Abbildungen, Eigenwerte, Eigenvektoren

1. Determinante, Inverse Matrix:

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ und die rechte Seite $\vec{d} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösen Sie das Gleichungssystem mithilfe der inversen Matrix A^{-1} .

2. Spiegelmatrix

Welche Matrix spiegelt im zweidimensionalen Vektorraum mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem an der Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten (diese Spiegelung vertauscht x- und y-Koordinaten).

Welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat diese Matrix (anschaulich und rechnerisch)?

3. Eigenwerte, charakteristisches Polynom

a) Bestimmen Sie zur Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(M - \lambda E)$ und die Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Setzen Sie die Matrix selber an Stelle von λ in das Polynom ein und berechnen sie $p(M)$.

(Hinter das absolute Glied muss man dann sinngemäß die Einheitsmatrix schreiben und das Ergebnis ist sinngemäß die Nullmatrix und nicht die Zahlennull. Zur Kontrolle: $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$)

4. Eigenwerte, Eigenvektoren

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie

- a) alle Eigenwerte von A und
- b) den Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert.

Lösungen – Übungsblatt 3:

1.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{d} \quad | \quad A^{-1} \cdot \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{d}.$$

$$(\text{Zur Kontrolle: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x} = (14, 19, -23))$$

2.

Die gesuchte Matrix lautet $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, die Eigenvektoren sind (ganz anschaulich) Vektoren auf dem Spiegel $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum

Eigenwert $\lambda = 1$ und Vektoren senkrecht zum Spiegel $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = -1$.

3.

$$\text{Lös: } \det(M - \lambda E) = 2 - 3\lambda + \lambda^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \{\lambda \rightarrow 1, \lambda \rightarrow 2\}$$

$$p(M) = 2E - 3M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{aligned} \text{a) } \det A &= (1 - \lambda)(3 - \lambda)(6 - \lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 6; \end{aligned}$$

$$\text{b) } \text{EV1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$