

Übungsblatt 5

Funktionen und Ableitungen im $\mathbb{R}^n$

1. Bestimmen Sie, welche z der Funktion entsprechen

a) $x^2 z - 4 y^2 - 2 x y = 3$

b) $x z^2 - x y + y^2 = 4$

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

d) $z - x \ln y - 2 x z = 0$

2. Bestimmen Sie das Bild der Höhenlinien von

a.) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

b.) $f(x, y) = x^2 - y^2$

c.) $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$

3. Bestimmen Sie die Schnittkurven von Flächen mit der y-z-Ebene und der x-z-Ebene von

a.) $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

b.) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

4. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von:

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung folgender Funktionen

a) $f(x, y, z) = \sin(xy) + \ln(yz)$

b) $f(x, y, z) = \cos(x + y) + e^x \sin(z)$

c) $f(x, y, z) = \frac{xz^2}{\cos y} + y^2 \ln(xz)$

5. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von:

Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen

a) $\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right); \quad \frac{\partial}{\partial v_0} (v_0 + at); \quad \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)$

b) $\frac{\partial}{\partial t} \sin(ct - 5x); \quad \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}} \right)$

c) $\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{e^{x\beta-3}}{2y\beta+5}; \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Lösungen – Übungsblatt 5:

1.

Die Funktionen $z = f(x, y)$ entsprechen

$$a) \quad x^2 z - 4 y^2 - 2 x y = 3, \quad z = \frac{3}{x^2} + 4 \frac{y^2}{x^2} + 2 \frac{y}{x}$$

$$d) \quad z(1 - 2x) - x \ln y = 0, \quad z = \frac{x \ln y}{1 - 2x}$$

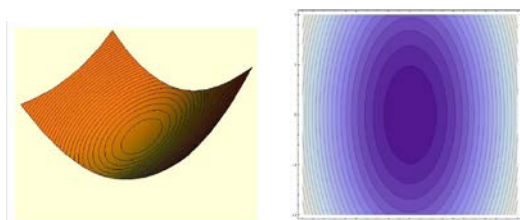
Keinen Funktionen $z = f(x, y)$ entsprechen

$$b) \quad x z^2 - x y + y^2 = 4, \quad z^2 = \frac{4}{x} + y - \frac{y^2}{x}, \quad z = \pm \sqrt{\frac{4}{x} + y - \frac{y^2}{x}}$$

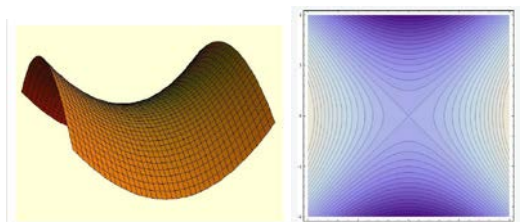
$$c) \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \quad z = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

2.

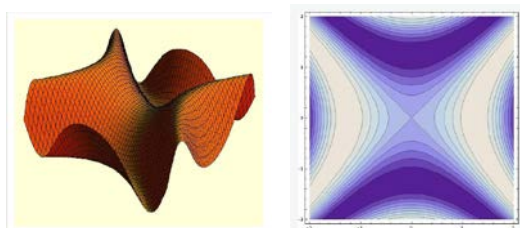
a.



b.

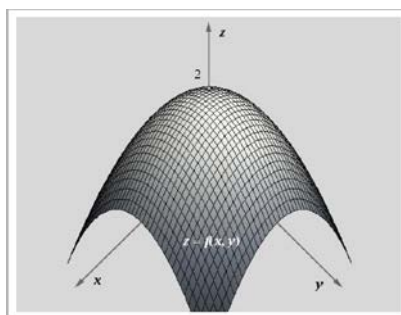


c.

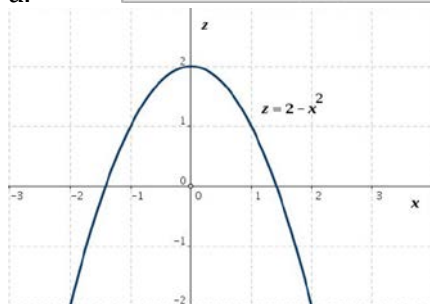


Lsg.

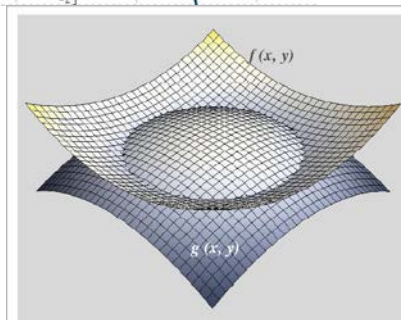
3.



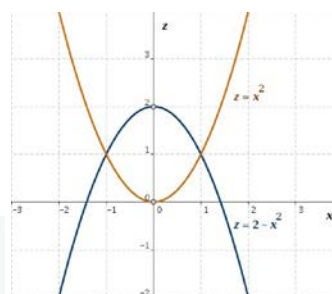
a.



Die Schnittkurve der Funktion $z = f(x, y)$ mit der z,x -Ebene
(die Schnittkurve $z = 2 - x^2$)



b.



Die Schnittkurven der Funktionen $z = f(x, y)$ und $z = g(x, y)$ mit der z,x -Ebene

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = 2 - x^2 - y^2$$

Lsg.

4. Partielle Ableitungen

$$a) \quad f(x, y, z) = \sin(xy) + \ln(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy) + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

$$b) \quad f(x, y, z) = \cos(x+y) + e^x \sin(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+y) + e^x \sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x+y), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^x \cos z$$

$$c) \quad f(x, y, z) = \frac{xz^2}{\cos y} + y^2 \ln(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z^2}{\cos y} + \frac{y^2}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xz^2 \sin y}{\cos^2 y} + 2y \ln(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2xz}{\cos y} + \frac{y^2}{z}$$

5.

$$a) \quad \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{v^2}{2}; \quad \frac{\partial}{\partial v_0} (v_0 + at) = 1; \quad \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{2\pi r}{T} \right) = -\frac{2\pi r}{T^2}$$

$$b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sin(ct - 5x) = c \cos(ct - 5x); \quad \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}} \right) = -\frac{\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM^3}}$$

$$c) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{e^{x\beta-3}}{2y\beta+5} = e^{x\beta-3} \frac{(2xy\beta+5x-2y)}{(2y\beta+5)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0 v}{c^2 \sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}$$