

Übungsblatt 9

Mehrfach-Integrale

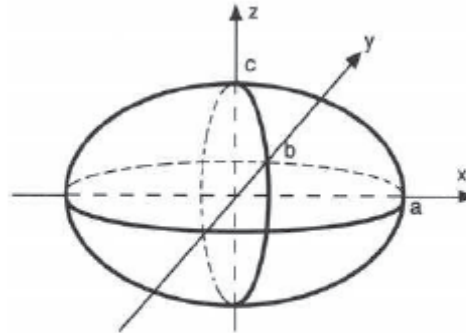


Fig. 7.8: Ellipsoid

1. Berechnen Sie das Volumen folgenden Körpers
(Volumen eines Ellipsoides) Ein Ellipsoid, wie in Fig. 7.8 skizziert, besteht aus allen Punkten

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

wobei die positiven Zahlen a, b, c die Hauptachsenlängen des Ellipsoides sind.

Quelle: [Burg/Haf/Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd 1]

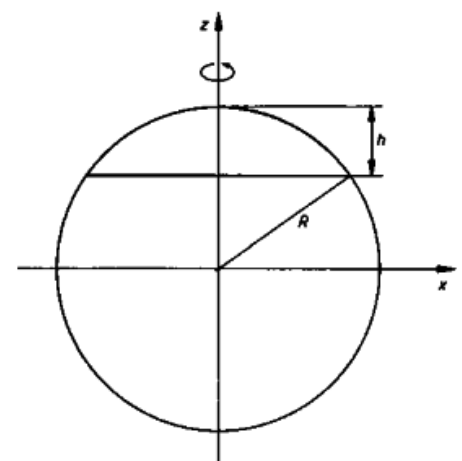
2. Es sei U der Einheitskreis um den Nullpunkt. Bestimmen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten.:

$$\iint_U e^{x^2+y^2} dx dy$$

Quelle: [Riessinger - Mathematik für Ingenieure, Übungsaufgaben]

3. Berechnen Sie für die im Bild skizzierte homogene **Kugelhaube**(**Kugelabschnitt**) Volumen und Schwerpunkt. (R: Radius der Kugel, h: Höhe der Kugelhaube)

Quelle: [Papula, Mathematik für Ingenieure, Bd 2]



Lösungen – Übungsblatt 9:

1.

Wir berechnen das Volumen eines halben Ellipsoides, und zwar das Volumen der »oberen Hälfte« (d.h. $z \geq 0$). Der »obere Deckel« des Ellipsoides — d.h. der Teil des Ellipsoidrandes mit $z \geq 0$ — wird durch $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ mit $z \geq 0$ beschrieben, also aufgelöst nach z durch

$$z = f(x, y) := c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad \text{wobei} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \quad (7.7)$$

gelten muß. Diese Ungleichung beschreibt eine Ellipse, und zwar die Schnittfläche zwischen dem Ellipsoid und der x - y -Ebene. Die Ellipse ist der Definitionsbereich B unserer Funktion f in (7.7). Damit ist das halbe Ellipsoidvolumen gleich

$$V = \iint_B c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy. \quad (7.8)$$

Die Ellipse B läßt sich offenbar einschließen von den Graphen der beiden Funktionen

$$h(x) := b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad g(x) = -h(x), \quad \text{für } x \in [-a, a].$$

Nach (7.5) erhalten wir damit

$$V = \int_{-a}^a \left(\int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dy \right) dx.$$

Zur Lösung des inneren Integrals faßt man $p := \sqrt{1 - (x/a)^2}$ als Konstante auf und bringt $\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$ durch die Substitution $y = bp \cdot t$ auf die

Gestalt $p\sqrt{1 - t^2}$. Die Anwendung der Substitutionsregel und Verwendung von $2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \pi$ (Inhalt des Einheitskreises, Abschn. 4.2.2) ergibt

$$V = \frac{cb\pi}{2} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{2}{3}abc\pi.$$

Das Volumen des Ellipsoides ist das Doppelte hiervon, also

$$\text{Volumen des Ellipsoides: } \frac{4}{3}abc\pi. \quad (7.9)$$

Speziell für $a = b = c =: r$ erhält man das

$$\text{Kugelvolumen: } \frac{4}{3}r^3\pi. \quad (7.10)$$

2.

$$\iint_U e^{x^2+y^2} dx dy = \iint_{\tilde{U}} e^{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \cdot r dr d\varphi = \iint_{\tilde{U}} e^{r^2} \cdot r dr d\varphi,$$

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{U}} e^{r^2} \cdot r dr d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{r^2} \cdot r dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right] d\varphi \\ &= \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \\ &= \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right) \cdot 2\pi \\ &= \pi \cdot (e - 1). \end{aligned}$$

3.

Der Kreis $x^2 + z^2 = R^2$ geht für $x \rightarrow r$ in die Kugel $r^2 + z^2 = R^2$, d.h. $z = \pm \sqrt{R^2 - r^2}$ über. Obere Begrenzungsfläche ist $z = \sqrt{R^2 - r^2}$, untere Begrenzungsfläche die zur x, y -Ebene parallele Ebene $z = R - h$. Die Projektion der Kugelhaube in die x, y -Ebene ergibt einen Kreis vom Radius R_0 ,
d.h. $R_0 = \sqrt{2Rh - h^2}$.

$$R_0^2 + (R - h)^2 = R^2,$$

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2Rh-h^2}} \int_{z=R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} r dz dr d\varphi = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$$

Schwerpunkt $S = (0; 0; z_S)$ mit:

$$z_S = \frac{3}{\pi h^2 (3R - h)} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2Rh-h^2}} \int_{z=R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} z r dz dr d\varphi = \frac{3(2R - h)^2}{4(3R - h)}$$