

Zahlensysteme

Eine natürliche Zahl (wie z.B. drei oder siebzehn etc.) kann man auf verschiedene Weisen *darstellen*, etwa als römische Zahl (z.B. XVII) oder durch Worte einer natürlichen Sprache (z.B. siebzehn oder seventeen) oder durch Rauchzeichen etc. Besonders häufig werden Zahlen heute in einem *Stellenwertsystem* dargestellt, und unter diesen Systemen ist das 10-er-System (das Stellenwertsystem mit der Basis 10) das populärste. Freunde von Fremdworten bezeichnen dieses System als *Dezimalsystem*. *Stellenwertsysteme* werden auch als *Positionssysteme* oder als *polyadische Zahlensysteme* bezeichnet.

1. Stellenwertsysteme

Zu jeder positiven Ganzzahl b gibt es ein *Stellenwertsystem* mit der Basis b . Für einige dieser Systeme sind aus dem Latein oder Griechischen abgeleitete Namen wie *Dezimalsystem*, *Binärsystem* (oder *Dualsystem*), *Oktalsystem* und *Hexadezimalsystem* verbreitet. Einfacher und systematischer ist es aber, die Systeme nach ihrer *Basis* zu benennen: 1-er-System, 2-er-System, 3-er-System, ..., 137-er-System, ..., 1_500-er-System, 4_294_967_296-er-System, ... etc.

Das System mit der Basis 4_294_967_296 (gleich 2^{32}) wird in der Informatik und speziell in Java besonders häufig benutzt (z.B. in den Klassen `BigInteger` und `BigDecimal`). In vielen Kneipen werden Zahlen auf Bierdeckeln im 1-er-System notiert.

Anmerkung: Nur im 1-er-System kann man eine Zahl durch das *Anhängen einer Ziffer* um 1 vergrößern (auch mehrmals), ohne schon vorhandene Ziffern ändern oder löschen zu müssen. Deshalb ist das 1-er-System bei KellnerInnen so beliebt.

Zum Stellenwertsystem mit der Basis b (kurz: zum **b-er-System**) gehören genau b Ziffern.

Wenn die Basis b kleiner oder gleich 36 ist, verwendet man üblicherweise die b ersten der Zeichen 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Wenn b größer ist, kann man folgende Notation benutzen:

Man notiert jede einzelne Ziffer als eine 10-er-Zahl (Dezimalzahl) und trennt die Ziffern z.B. durch ein Semikolon ; voneinander.

Beispiel-11: Eine Zahl im 50-er-System: 20 ; 45

Diese Zahl besteht aus zwei Ziffern (20 und 45) und hat den Wert $20 \cdot 50 + 45$ gleich 1045_{10} .

Die Zahl 1 ; 1 ; 1₅₀ besteht aus drei Ziffern und hat den Wert $1 \cdot 2500 + 1 \cdot 50 + 1$ gleich 2551_{10} .

2. Ziffern und Ziffernwerte, Stellen und Stellenwerte, Beiträge

Eine *Zahl* wird in einem Stellenwertsystem als eine (nicht-leere) *Folge von Ziffern* dargestellt.

Jede Ziffer hat einen *Ziffernwert*.

Beispiel-21: Die Ziffer 0 hat den Wert null, die Ziffer 7 hat den Wert sieben, die Ziffer A hat den Wert zehn und die Ziffer Z hat den Wert fünfunddreißig.

Jede Ziffer einer Zahl steht innerhalb der Zahl an einer bestimmten *Stelle*. Die Stellen sind *von rechts nach links* mit 0 beginnend durchnummeriert.

Beispiel-22: In der Zahl 7A3B4 steht die Ziffer 4 an der Stelle 0 und die Ziffer 7 an der Stelle 4.

Anmerkung: Dass die Stellen von rechts nach links durchnummeriert sind (und nicht von links nach rechts) hängt damit zusammen, dass die Europäer das 10-er-System (Dezimalsystem) von den Arabern übernommen haben, die von rechts nach links schreiben. Leider haben die Europäer es versäumt, die Schreibweise der arabischen Zahlen ihrer ("europäischen") von-links-nach-rechts-Schreibweise anzupassen. Deshalb ist es ziemlich schwierig, viele (unterschiedlich lange) Zahlen stellengerecht untereinander zu schreiben. denn dazu muss man zuerst die Länge der längsten Zahl ermitteln. Im Arabischen gibt es kein solches Problem, weil die Zahlen zur von rechts-nach-links-Schreibweise passen.

Jeder Stelle (0, 1, 2, ...) innerhalb einer Zahl ist ein *Stellenwert* zugeordnet, und zwar der Wert b^{Stelle} (wobei auch hier b die Basis des verwendeten Systems sein soll).

Beispiel-23: Im 10-er-System ist der Stelle 3 der Stellenwert 10^3 gleich 1000_{10} zugeordnet.

Im 2-er-System ist der Stelle 3 der Stellenwert 2^3 gleich 8 zugeordnet.

Im 12-er-System ist der Stelle 3 der Stellenwert 12^3 gleich 1728_{10} zugeordnet.

Aufgabe-21: Welchen Stellenwert hat die Stelle 0 im 10-er-System?

Und im 2-er-System? Und im 12-er-System? Und im 3758-er-System?

Innerhalb einer Zahl liefert jede Ziffer einen *Beitrag* zum Wert der Zahl. Dieser Beitrag ist gleich *Ziffernwert-der-Ziffer* * *Stellenwert-ihrer-Stelle*.

Beispiel-24: Die folgende Tabelle enthält die 10-er-Zahl **2375** sowie die Stellen, Stellenwerte und Beiträge der einzelnen Ziffern:

Stellen	...	3	2	1	0
Stellenwerte (Formeln)	...	10^3	10^2	10^1	10^0
Stellenwerte (ausgerechnet)	...	1000	100	10	1
Ziffern einer Zahl	...	2	3	7	5
Beiträge der Ziffern	...	2000	300	70	5

Beispiel-25: Die folgende Tabelle enthält die 5-er-Zahl **2310** sowie die Stellen, Stellenwerte und Beiträge der einzelnen Ziffern:

Stellen	...	3	2	1	0
Stellenwerte (Formeln)	...	5^3	5^2	5^1	5^0
Stellenwerte (ausgerechnet)	...	125	25	5	1
Ziffern einer Zahl	...	2	3	1	0
Beiträge der Ziffern	...	250	75	5	0

Der 5-er-Zahl 2310_5 entspricht die 10-er-Zahl $250 + 75 + 5 + 0$ gleich 330_{10} .

Aufgabe-22: Tragen Sie die 3-er-Zahl **2012** sowie die Stellen, Stellenwerte und Beiträge der einzelnen Ziffern in die folgende Tabelle ein (ganz entsprechend den vorangehenden Beispielen):

Stellen	...				
Stellenwerte (Formeln)	...				
Stellenwerte (ausgerechnet)	...				
Ziffern einer Zahl	...				
Beiträge der Ziffern	...				

Aufgabe-23: Welchen Wert hat die Ziffernfolge 10,

wenn man sie als 2-er-Zahl liest?

wenn man sie als 10-er-Zahl liest?

wenn man sie als 16-Zahl liest?

wenn man sie als 3758-er-Zahl liest?

3. Umwandeln von einem fremden System ins 10-er-System

Angenommen, wir wollen die 5-er-Zahl 2310_5 in eine 10-er-Zahl umwandeln. Dazu erstellen wir die Tabelle aus dem **Beispiel-25** (Zeile für Zeile, von oben nach unten) und addieren dann die Beiträge (d.h. die Zahlen in der untersten Zeile).

Aufgabe-31: Wandeln Sie die 7-er-Zahl 2136_7 mit Hilfe der folgenden Tabelle in eine 10-er-Zahl um:

Stellen	...	3	2	1	0
Stellenwerte (Formeln)	...	7^3	7^2	7^1	7^0
Stellenwerte (ausgerechnet)	...	343	49	7	1
Ziffern einer Zahl	...				
Beiträge der Ziffern	...				

4. Umwandeln vom 10-er-System in ein fremdes System

Angenommen, wir wollen die 10-er-Zahl 330_{10} in eine 5-er-Zahl umwandeln. Dazu erstellen wir eine Tabelle ähnlich wie im **Beispiel-25**, füllen aber erst mal nur die ersten drei Zeilen aus. Die folgende Tabelle ist absichtlich um eine Spalte zu groß gezeichnet, weil das nicht schadet. Eine Tabelle mit zu wenig Spalten kann dagegen zu Fehlern führen:

Stellen	...	4	3	2	1	0
Stellenwerte (Formeln)	...	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
Stellenwerte (ausgerechnet)	...	625	125	25	5	1
Ziffern einer Zahl	...					
Beiträge der Ziffern	...					

Dann füllen wir die 4. Zeile ("Ziffern einer Zahl") von links nach rechts aus. Dazu fragen wir uns:

Was ist die größte Ziffer (des 5-er-Systems), welche wir unter den Stellenwert 625 schreiben dürfen, um die Zahl 330_{10} darzustellen? Offenbar ist das die Ziffer 0, denn schon eine 1 würde den Beitrag 625 ergeben, und der wäre größer als die darzustellende Zahl 330_{10} .

Dann fragen wir uns:

Was ist die größte Ziffer (des 5-er-Systems), welche wir unter den Stellenwert 125 schreiben dürfen, um die Zahl 330_{10} darzustellen? Offenbar ist das die Ziffer 2. Wir tragen diese 2 ein und darunter ihren Beitrag 250 (gleich $2 \cdot 125$). Mit den restlichen Ziffern müssen wir jetzt also noch $330 - 250$ gleich 80_{10} darstellen.

Dann fragen wir uns:

Was ist die größte Ziffer (des 5-er-Systems), welche wir unter den Stellenwert 25 schreiben dürfen, um die Zahl 80_{10} darzustellen? Offenbar ist das die Ziffer 3. Wir tragen diese 3 ein und darunter ihren Beitrag 75 (gleich $3 \cdot 25$). Mit den restlichen Ziffern müssen wir jetzt also noch $330 - 250 - 75$ gleich 5_{10} darstellen.

Und so weiter. Wenn wir fertig sind, sollte die Tabelle ganz ähnlich wie im **Beispiel-25** aussehen.

Aufgabe-41: Wandeln Sie die 10-er-Zahl 2300_{10} mit Hilfe der folgenden Tabelle in eine 7-er-Zahl um:

Stellen	...	4	3	2	1	0
Stellenwerte (Formeln)	...	7^4	7^3	7^2	7^1	7^0
Stellenwerte (ausgerechnet)	...	2401	343	49	7	1
Ziffern einer Zahl	...					
Beiträge der Ziffern	...					

5. Zahlen und Darstellungen von Zahlen

Oft wird als selbstverständlich vorausgesetzt, dass Zahlen als 10-er-Zahlen (Dezimalzahlen) dargestellt werden und man unterscheidet dann auch nicht zwischen Eigenschaften einer *abstrakten Zahl* und Eigenschaften einer konkreten *Darstellung dieser Zahl*. Aber manchmal ist dieser Unterschied wichtig. Z.B. hat die Zahl *siebzehn* nur dann genau zwei Ziffern, wenn man sie in bestimmten Zahlensystemen darstellt (z.B. im 10-er-System 17_{10} oder im 16-er-System 11_{16}). Dagegen ist die Tatsache, dass *siebzehn* eine Primzahl ist, eine Eigenschaft der abstrakten Zahl *siebzehn* und unabhängig davon, wie wir sie darstellen.

Aufgabe-51: Welche der folgenden Eigenschaften sind Eigenschaften von abstrakten *Zahlen* und welche sind Eigenschaften von bestimmten *Darstellungen* von Zahlen?

E1: Ist ungerade

E2: Besteht aus 3 Ziffern

E3: Ist prim

E4: Endet mit der Ziffer 7

E5: Ist größer als drei

E6: Hat die Quersumme acht

E7: Kann in Java als `int`-Wert dargestellt werden

Aufgabe-52: Welches ist die *kleinste* Basis b für die gilt: Wenn man die Zahl *siebzehn* im b -er-System darstellt, hat sie genau zwei Ziffern.

Aufgabe-53: Welches ist die *größte* Basis b für die gilt: Wenn man die Zahl *siebzehn* im b -er-System darstellt, hat sie genau zwei Ziffern.

6. Führende Nullen

Üblicherweise werden Zahlen *ohne unnötige führende Nullen* notiert. Das "unnötig" ist nötig wegen der Zahl `null`. Sie wird üblicherweise durch eine Ziffer 0 dargestellt, die zwar führend, aber nötig ist (ohne sie könnte man nicht unterscheiden, ob da eine Zahl steht oder nicht).

Obwohl man unnötige führende Nullen üblicherweise nicht notiert, ist es manchmal konzeptionell günstig, sich viele davon vorzustellen, z.B. wenn man folgende Java-Methode programmiert:

```

1 static int zehner_Ziffer(int n, int s) {
2     // Verlaesst sich darauf, dass n und s groesser oder gleich 0 sind.
3     // Liefert die Ziffer, die in der Darstellung der Zahl n als
4     // 10-er-Zahl (als Zahl im Stellenwertsystem mit der Basis 10)
5     // an der Stelle s steht
6     ...
7 }
```

Ein Aufruf wie z.B. `zehner_Ziffer(17, 2)` oder `zehner_Ziffer(17, 100)` sollte als Ergebnis 0 liefern (und nicht eine Ausnahme werfen).

Die folgenden Aufgaben sind für ProgrammiererInnen gedacht, die mindestens ein Semester lang Java gelernt haben oder über entsprechende Vorkenntnisse verfügen.

Aufgabe-61: Schreiben Sie die oben beschriebene Methode `zehner_ziffer`.

Aufgabe-62: Schreiben Sie eine Methode entsprechend der folgenden Spezifikation:

```
1 static int b_er_Ziffer(int b, int n, int s) {
2     // Verlaesst sich darauf, dass b groesser oder gleich 2 ist und
3     // n und s groesser oder gleich 0 sind.
4     // Liefert die Ziffer, die in der Darstellung der Zahl n als
5     // b-er-Zahl (als Zahl im Stellenwertsystem mit der Basis b)
6     // an der Stelle s steht.
7     ...
8 }
```