Grundlagen der Schwingungslehre

Einführung. Vorgänge, bei denen eine physikalische Größe in festem zeitlichen Abstand ein und denselben Werteverlauf aufweist, werden als periodisch bezeichnet. Den zeitlichen Abstand, in dem sich der Vorgang wiederholt, bezeichnet man als Periodendauer *T*, die sich gegenüber der Wiederholungshäufigkeit, der Frequenz *f*, umgekehrt proportional verhält.

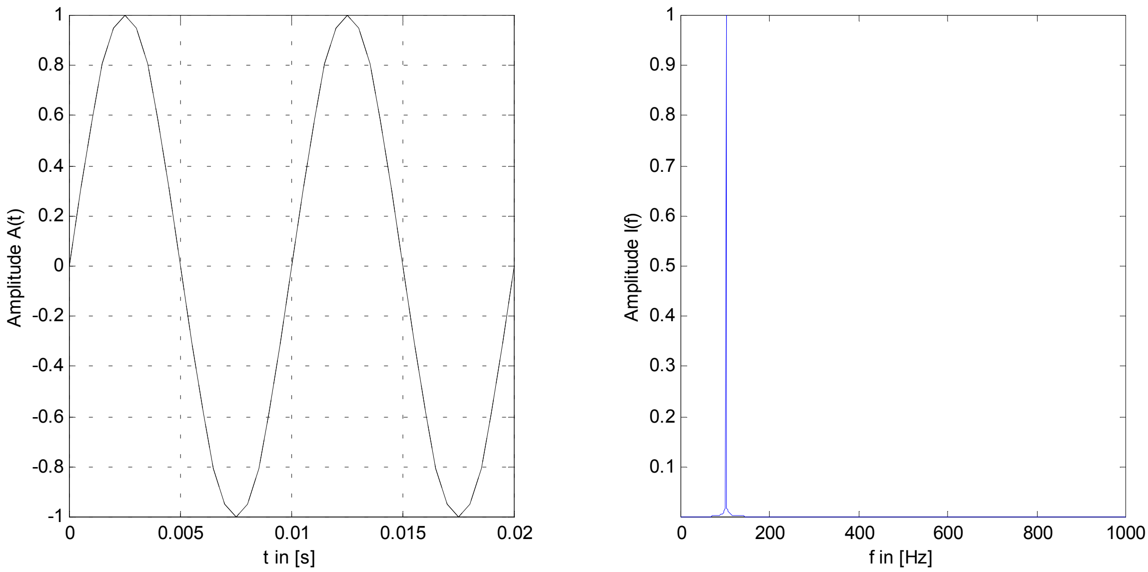


Abbildung 1: Abbildung einer Sinusschwingung mit der Frequenz mit der Periodendauer *T* = 0.01 s, entspricht *f* = 100 Hz (links), und das dazugehörige Spektrum mit einer Linie bei 100 Hz (rechts).

Einfachstes Mittel zur Beschreibung eines periodischen Vorgangs ist die Sinusfunktion (Abbildung 1), die die folgenden Parameter aufweist:

$$A(t) = \hat{A} \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t + \varphi) = \hat{A} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)$$

- $A(t)$ Augenblicksamplitude
- $\hat{A}$ Maximalwert der Amplitude am höchsten Punkt des Kurvenverlaufs (Scheitelwert)
- f Frequenz $=1/T$
- φ Phasenverschiebung gegenüber dem Ursprung der Zeitachse

Man kann sich die Sinuskurve auch als Projektion der Spitze eines Zeigers denken, der in T einmal den Einheitskreis (Radius =1) umrundet.

Die der Sinusfunktion verwandte Kosinusfunktion läßt sich als um φ = π/2, bzw. 90° verschobene Sinusschwingung beschreiben:

$$A(t) = \hat{A} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t) = \hat{A} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

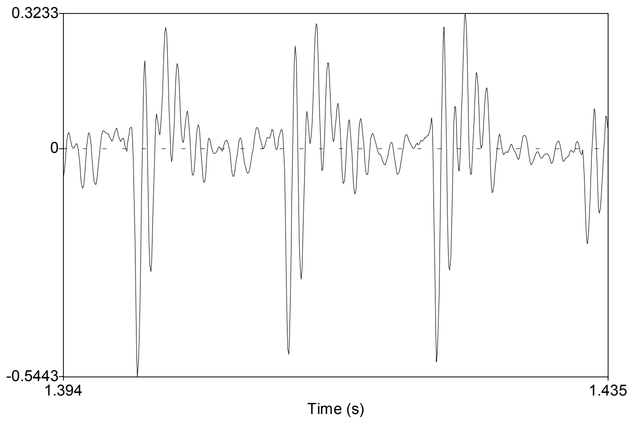


Abbildung 2: Beispiel für komplexe periodische Funktion, Ausschnitt aus dem Vokal [a], produziert von einem männlichen Sprecher, f_0 ≈ 82.5 Hz.

Harmonische Synthese. Es läßt sich zeigen, daß sich beliebige, auch recht komplexe periodische Funktionen (siehe Beispiel Abbildung 2) als Überlagerung von Sinusschwingungen beschreiben lassen. Dieser Ansatz basiert auf der sog. *Fourier-Reihenentwicklung* und wird auch als *harmonische Synthese* bezeichnet. Eine periodische Funktion $A_p(t)$ mit der Periodendauer T_0, bzw. der Frequenz f_0 läßt sich dann wie folgt darstellen:

$$A_p(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{A}_i \sin(2\pi \cdot i \cdot f_0 \cdot t + \varphi_i)$$

Das bedeutet, daß die Frequenzen aller Teiltöne, d.h. der einzelnen Sinusschwingungen, aus denen sich die periodische Funktion zusammensetzt, mit einer Grundfrequenz f_0 in einem geradzahligen („harmonischen") Verhältnis stehen. Da es sich dabei um einen Addition von Teiltönen handelt, spricht man auch oft von *additiver Synthese*.

Die Spitzenamplituden $\hat{A}_i$ der Teiltöne nennt man auch *Fourierkoeffizienten*. Diese Koeffizienten und die dazugehörigen Phasenwinkel φ_i lassen sich für einfache periodische Funktionen direkt berechnen. Koeffizienten und Phasenwinkel für einzelne Teiltöne können auch 0 sein, d.h. diese tauchen in der betrachteten Funktion nicht auf, oder weisen keine Phasenverschiebungen gegenüber der Grundwelle auf.

Beispiele:

Sägezahnschwingung:	Teiltöne i=1, 2, 3, ..., ∞;	φ_i =0 für alle i;	$\hat{A}_i = 1/i$
Rechteckschwingung:	Teiltöne i=1, 3, 5, ..., ∞;	φ_i =0 für alle i;	$\hat{A}_i = 1/i$

Theoretisch benötigt man unendlich viele Teiltöne, um die ideale Sägezahn- oder Rechteckschwingung zu konstruieren. Da die Amplituden derTeiltöne mit der Frequenz jedoch schnell abnehmen, reichen wenige Teiltöne, um den wesentlichen Kurvenverlauf zu synthetisieren. Abbildung 3 zeigt solche Approximationen mit einer endlichen Anzahl von Teiltönen.

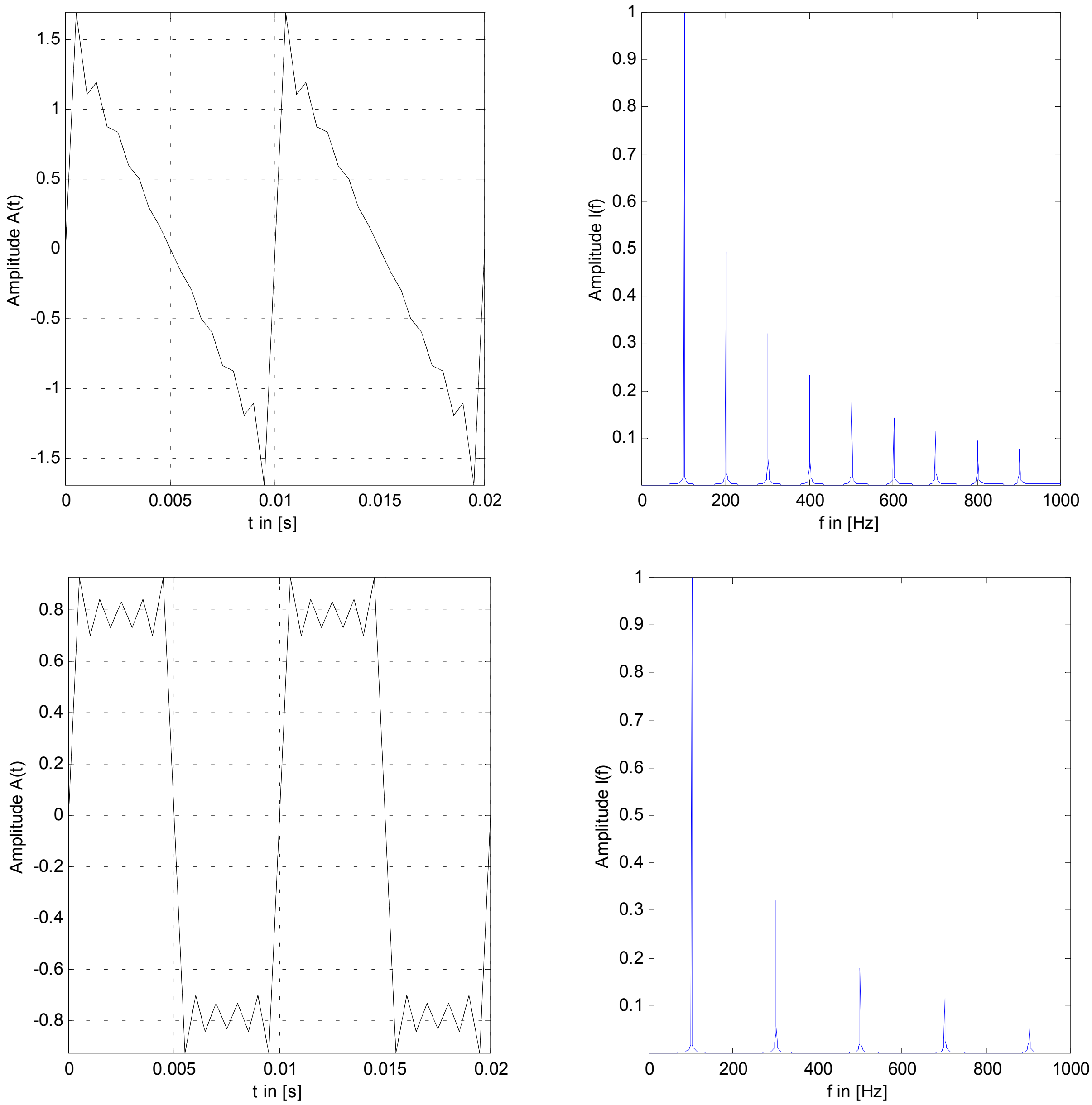


Abbildung 3: Annäherungen von Sägezahn- und Rechteckfunktion mit endlicher Anzahl von Teiltönen: Oben Sägezahn (Grundwelle mit acht Obertönen), unten Rechteck (Grundwelle mit vier Obertönen). Rechts ist jeweils das zugehörige Spektrum der Teiltöne abgebildet.

Verknüpfung von Sinusfunktionen. Es existieren nützliche Beziehungen zur Multiplikation und Addition von Sinus und Kosinus, mit denen sich komplexere Schwingungsvorgänge beschreiben lassen.

Produkte von Sinus- und Kosinusfunktionen

$$1)\ \sin(x)\cdot\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

$$2)\ \cos(x)\cdot\cos(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$$

$$3)\ \sin(x)\cdot\cos(y)=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$$

$$4)\ \cos(x)\cdot\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

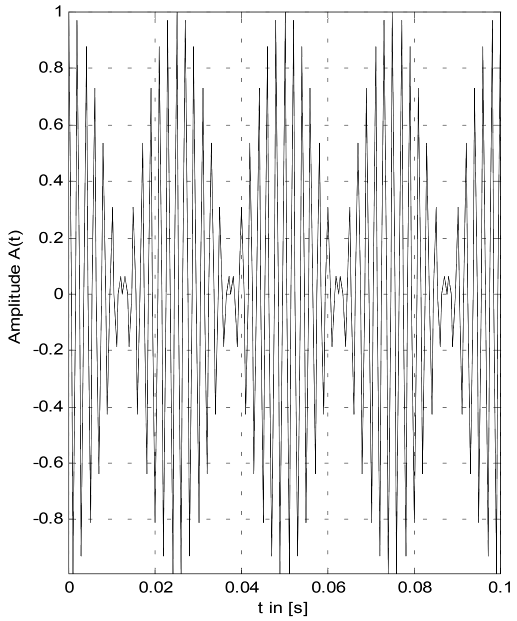
In der Musik, aber auch bei der Übertragung von Audiosignalen mittels Radiowellen tritt oft der Fall auf, daß eine Schwingung höherer Frequenz durch eine Schwingung tiefer Frequenz in der Amplitude variiert wird. Man spricht auch von *Modulation*, bzw. *Amplitudenmodulation (AM).* Dieses Phänomen findet man z.B. beim sogenannten *Vibrato* auf Streichinstrumenten, aber auch bei Synthesizern. Der Einfachhalt halber wollen wir den Vorgang der AM mit Hilfe der Formel 2) beschreiben, da diese nur positive Vorzeichen enthält. Wie wir aber gesehen haben, läßt sich der Kosinus jederzeit auch als phasenverschobener Sinus darstellen. Wenden wir nun Formel 2) auf zwei Schwingungen im Zeitbereich an, so nimmt diese die folgende Form an:

$$A(t)=\hat{A}\cdot\cos(2\pi\cdot f_t\cdot t)\cdot\cos(2\pi\cdot f_m\cdot t)=$$

$$\frac{1}{2}\hat{A}\cdot(\cos(2\pi\cdot(f_t-f_m)\cdot t)+\cos(2\pi\cdot(f_t+f_m)\cdot t))$$

f_t bezeichnet die Frequenz der hochfrequenten modulierten Schwingung (man spricht auch von *Trägerfrequenz)*, f_m die Frequenz der tieffrequenten modulierenden Schwingung, *der Modulationsfrequenz.* Wie wir aus der Formel ersehen können, entstehen bei der Multiplikation der beiden Schwingungen zwei neue Schwingungen mit den Frequenzen (f_t - f_m) und (f_t + f_m). Da diese links und rechts von der ursprünglichen Trägerfrequenz f_t liegen, spricht man auch von *Seitenbändern*. Abbildung 4 zeigt ein Beispiel für f_t = 500 Hz und f_m = 20 Hz.

Eine Amplitudenmodulation entsteht in der Musik auch bei der sogenannten *Schwebung.* Diese z.B. tritt auf, wenn zwei Instrumente geringfügig gegeneinander verstimmt sind. Die Überlagerung einzelner, von den beiden Instrumenten gleichzeitig gespielter Noten, wird, solange f_m relativ gering ist (z.B. etwa 5 Hz) als ein Ton mit sich verändernder Amplitude wahrgenommen. Diesen Effekt nutzt man bei der Stimmung von Saiteninstrumenten, aber auch von Oszillatoren an Synthesizern.



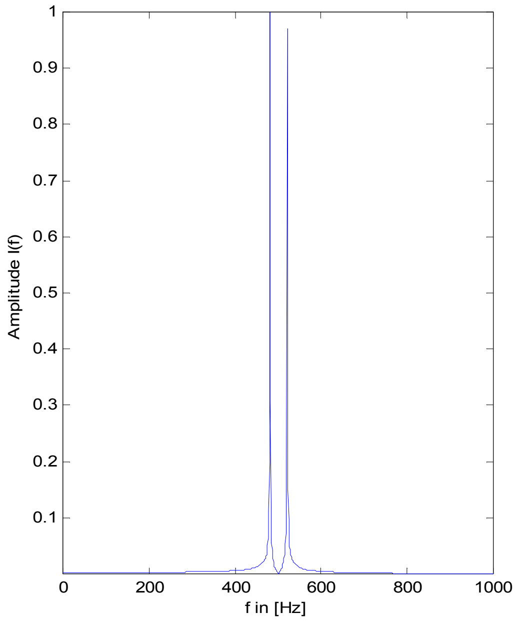


Abbildung 4: Beispiel für Amplitudenmodulation: f_t = 500 Hz, f_m= 20 Hz. Im Spektrum (rechts) erscheinen zwei Linien, eine bei f_t - f_m = 480 Hz und eine bei f_t + f_m = 520 Hz.

Abtastung. Damit ein Audiosignal auf dem Rechner verarbeitet werden kann, muß es zeitlich diskretisiert werden, d.h. abgetastet. Die Frequenz, mit der die Abtastung erfolgt, bezeichnet man als Abtastfrequenz, bzw. Abtastrate f_a.

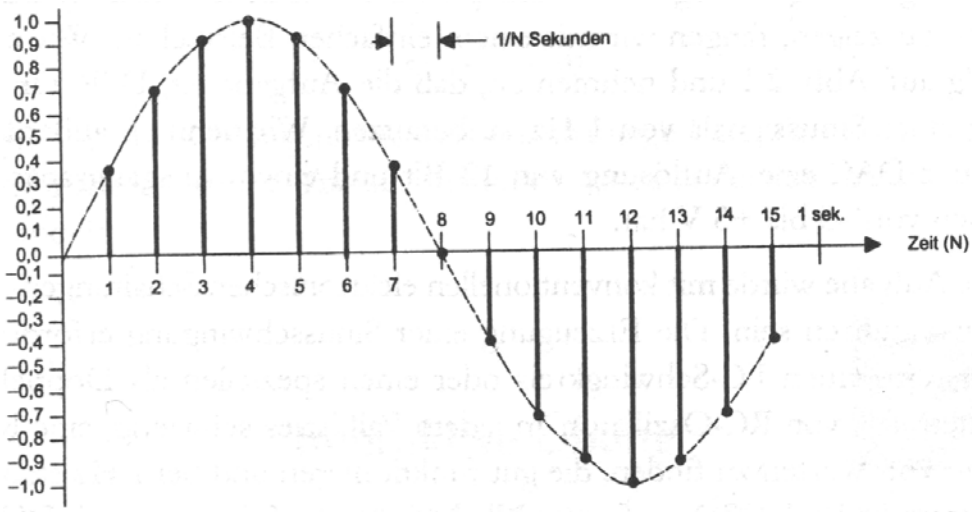


Abbildung 5: Abtastung eines Sinussignals im Abstand T_a = 1/16 s, entspricht einer Frequenz f_a = 16 Hz.

Damit das Signal später wieder aus den Abtastwerten rekonstruiert werden kann, muß gewährleistet sein, daß die Abtastfrequenz f_a mehr als doppelt so hoch gewählt wird wie die im abzutastenden Signal vorhandene höchste Frequenz:

$$f_a > 2 \cdot f_{\max}$$

Wird dieses sogenannte *Abtasttheorem* nicht eingehalten, so kommt es zu irreparablen Fehlern, sogenannten Faltungsverzerrungen.

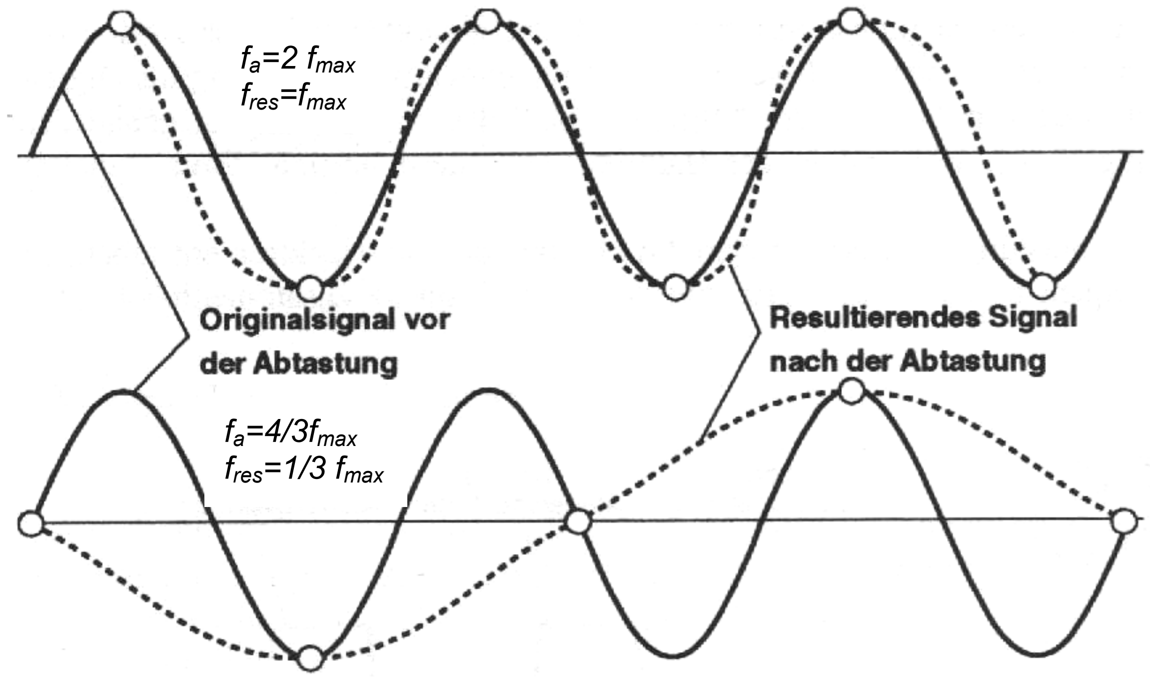


Abbildung 6: Entstehung von Faltungsverzerrungen. Oben: f_a=2 f_{max}, unten: f_a=4/3 f_{max}. Beim unteren Fall resultiert eine tiefere Frequenz als urspünglich abgetastet.

Dieses Phänomen ist im Beispiel Abbildung 6 dargestellt: Beim theoretischen Grenzfall (praktisch nicht zu realisieren!) wird die höchste Frequenz des Audiosignals pro Periode gerade zweimal abgetastet (f_a=2 f_{max}), oben. Verringert man die Abtastfrequenz weiter (f_a=4/3 f_{max}), kann der Verlauf des Signals nicht mehr korrekt erfaßt werden, die resultierende Frequenz ist geringer als die ursprüngliche.